ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR ET L. RÉDEI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XIX

FASC. 3—4

SZEGED, 1958

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ ÉS RÉDEI LÁSZLÓ

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

19. KÖTET

3—4. FÜZET

SZEGED, 1958. DECEMBER HÓ

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

Une contribution à la théorie constructive des fonctions.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

1. Introduction.

La théorie constructive des fonctions s'occupe de la recherche des relations réciproques entre les propriétés structurelles des fonctions et les propriétés de convergence de leurs différentes approximations. Le problème directe recherche l'ordre de grandeur de l'approximation, lorsque la fonction limite jouit de propriétés données; le problème inverse s'occupe de la détermination des propriétés structurelles de la fonction limite garanties par la vitesse de convergence d'une approximation donnée.

Un théorème fondamental dû à M. BERNSTEIN [1] résoût les deux problèmes d'une manière très simple pour une classe importante de fonctions 2π-périodiques $f(x)$ en affirmant que *la condition nécessaire et suffisante pour que* $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *avec* $0<\alpha<1$ *est que l'approximation de* $f(x)$ *par les moyennes de Fejér soit d'ordre de grandeur* $O(n^{-\alpha})$. La démonstration de ce théorème est étroitement liée à la structure particulière du noyau de Fejér; elle ne donne donc aucune indication, comment pourrait-on éventuellement étendre cette proposition à d'autres développements orthogonaux.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que, dans le cas $0<\alpha<\frac{1}{2}$, le théorème de M. BERNSTEIN peut être généralisé à une classe assez étendue de séries orthogonales; classe comprenant la série de Fourier et les séries de polynômes orthogonaux engendrés par une fonction de poids $\varrho(x) \geqq 0$. Il n'est peut-être pas sans intérêt que, même pour les moyennes de Fejér, notre théorème rend plus que le théorème original, parce que nous démontrerons, dans le cas $0<\alpha<\frac{1}{2}$, la validité de l'ordre de grandeur $O(n^{-\alpha})$ pour l'approximation au sens fort et non seulement au sens habituel.

2. Approximation des fonctions appartenant à une classe de Lipschitz par leurs développements suivant de polynômes orthogonaux.

Soit (a, b) un intervalle fini et $\varrho(x) \geqq 0$ une fonction intégrable en (a, b). Il est connu que $\varrho(x)$ détermine uniquement un système $\{p_n(x)\}$ de polynômes orthogonaux et normés tels que $p_n(x)$ soit de degré n et le coefficient de x^n soit positif. Désignons par

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(t) p_k(x)$$

le n-ième noyau du système $\{p_n(x)\}$ et par

$$s_n(x) = \int_a^b \varrho(t) f(t) K_n(t, x) dt$$

la n-ième somme partielle du développement de la fonction $L^2_{\varrho(x)}$-intégrable $f(x)$ suivant les fonctions du système $\{p_n(x)\}$. Soient enfin $C_1, C_2, \ldots$ des constantes positives indépendantes de l'indice n.

Théorème I. *Soit (c, d) un sous-intervalle de (a, b) et supposons que*

$$(1) \qquad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p_k^2(x) \leqq C_1 \qquad et \qquad 0 \leqq \varrho(x) \leqq C_2$$

pour $x \in (c, d)$. Si la fonction $f \in L^2_{\varrho(x)}$ satisfait pour $x \in (c, d)$ à la condition de Lipschitz

$$(2) \qquad |f(t) - f(x)| \leqq C_3 |t - x|^\alpha$$

avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on a en tout intervalle $(c + \delta, d - \delta)$ intérieur à (c, d) uniformément

$$(3) \qquad \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(x) - f(x)| = \frac{C_4}{n^\alpha} \qquad (C_4 = C_4(\delta)).$$

Nous avons à évaluer la somme

$$(4) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(x) - f(x)| = \sum_{\nu=0}^{n} \left| \int_a^b \varrho(t) [f(t) - f(x)] K_\nu(t, x) dt \right|$$

pour $x \in (c + \delta, d - \delta)$. Décomposons, à ce but, pour $n \geqq n_0$ où n_0 désigne le plus petit entier $> 1/\delta$, les intégrales figurant au deuxième membre en trois parties:

$$I_{\nu 1} = \int_a^c + \int_d^b, \qquad I_{\nu 2} = \int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{d}, \qquad I_{\nu 3} = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}.$$

Considérons d'abord la somme des $|I_{\nu 3}|$. Il s'ensuit par application de l'inégalité de Schwarz

$$I_{\nu 3}^2 \leqq \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varrho(t)[f(t)-f(x)]^2 dt \int_a^b \varrho(t) K_\nu^2(t, x) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} p_k^2(x) \cdot \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \varrho(t)[f(t)-f(x)]^2 dt.$$

On obtient donc d'après (1) et (2)

$$I_{\nu 3}^2 \leqq C_1(\nu+1)\cdot C_2 C_3 \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |t-x|^{2\alpha} dt \leqq \frac{C_5^2}{n^{2\alpha}},$$

c'est-à-dire que, pour $n \geqq n_0$,

$$\sum_{\nu=0}^{n} |I_{\nu 3}| \leqq C_5 n^{1-\alpha}. \tag{5}$$

Passons à la somme des $|I_{\nu 1}|$ et remarquons que, d'après la formule de Christoffel—Darboux, on a

$$K_\nu(t, x) = \gamma_\nu \frac{p_\nu(t) p_{\nu+1}(x) - p_{\nu+1}(t) p_\nu(x)}{t-x}$$

où $|\gamma_\nu| \leqq C_6$. Posons

$$g(t, x) = \begin{cases} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} & \text{pour } t \in (a, c) \cup (d, b), \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

alors

$$|I_{\nu 1}| \leqq C_6 |p_{\nu+1}(x)| \left| \int_a^b \varrho(t) g(t, x) p_\nu(t) dt \right| + C_6 |p_\nu(x)| \left| \int_a^b \varrho(t) g(t, x) p_{\nu+1}(t) dt \right|,$$

par conséquent

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n} |I_{\nu 1}| \right)^2 \leqq 2C_6^2 \sum_{\nu=0}^{n} p_{\nu+1}^2(x) \sum_{\mu=0}^{n} \left[\int_a^b \varrho(t) g(t, x) p_\mu(t) dt \right]^2 +$$

$$+ 2C_6^2 \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^2(x) \sum_{\mu=0}^{n} \left[\int_a^b \varrho(t) g(t, x) p_{\mu+1}(t) dt \right]^2.$$

Les intégrales figurant au deuxième membre étant les coefficients du développement de la fonction $L^2_{\varrho(x)}$-intégrable $g(t, x)$, on obtient, en tenant compte de (1), par application de l'inégalité de Bessel:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}|I_{\nu 1}|\right)^2 \leqq 2C_6^2\int_a^b \varrho(t)g^2(t,x)\,dt\cdot\sum_{\nu=0}^{n}\left[p_\nu^2(x)+p_{\nu+1}^2(x)\right]\leqq$$
$$\leqq 2C_6^2C_7\cdot C_1(2n+3)\leqq C_8^2 n.$$

Rappelons-nous de l'hypothèse $0<\alpha<\frac{1}{2}$ ou, en autres termes, de $n^{1-\alpha}>n^{\frac{1}{2}}$, et nous obtenons

$$\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu 1}|\leqq C_8 n^{1-\alpha}. \tag{6}$$

Posons maintenant, pour évaluer la somme des $|I_{\nu 2}|$,

$$h_n(t,x)=\begin{cases}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} & \text{pour}\quad t\in\left(c,x-\dfrac{1}{n}\right)\cup\left(x+\dfrac{1}{n},d\right),\\ 0 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

On voit comme ci-dessus que

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu 2}|\right)^2\leqq C_9 n\int_a^b \varrho(t)h_n^2(t,x)\,dt\leqq$$

$$\leqq C_9 n\left(\int_c^{x-\frac{1}{n}}+\int_{x+\frac{1}{n}}^{d}\right)\varrho(t)\left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right]^2 dt.$$

Il en résulte d'après (1) et (2):

$$\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu 2}|\leqq\left\{C_2C_3C_9 n\left(\int_c^{x-\frac{1}{n}}+\int_{x+\frac{1}{n}}^{d}\right)\frac{dt}{|t-x|^{2-2\alpha}}\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq C_{10}n^{1-\alpha}. \tag{7}$$

En réunissant les relations (4), (5), (6) et (7) nous obtenons pour $n\geqq n_0$

$$\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu(x)-f(x)|\leqq C_{11}n^{1-\alpha},$$

quel que soit le point $x\in(c+\delta, d-\delta)$, ce qui équivaut à l'inégalité (3) et la démonstration est achevée.

Théorème II. *Si $\{p_n(x)\}$ est le système des polynômes orthogonaux et normés engendrés par une fonction de poids $\varrho(x)\geqq 0$ satisfaisant à la condition*

$$0<m\leqq\varrho(x)\leqq M\quad \textit{pour}\quad x\in(c,d),$$

la validité de l'évaluation (3) *est nécessaire et suffisante pour que la fonction* $f \in L^2_{\varrho(x)}$ *satisfasse, en tout intervalle intérieur à (c, d) à la condition de Lipschitz* (2) *avec* $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

La nécessité découle d'un théorème de M. FREUD [2] d'après lequel l'hypothèse $\varrho(x) \geqq m > 0$ pour $x \in (c, d)$ entraîne la validité de la première inégalité (1) en tout intervalle intérieur à (c, d), et de notre théorème I. Quant à la suffisance, elle découle directement du théorème fondamental de M. BERNSTEIN d'après lequel l'ordre de grandeur $O(n^{-\alpha})$ de l'approximation de $f(x)$ par des polynômes de degré n entraîne $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ aux intervalles intérieurs à celui où cet ordre de grandeur est atteint.

3. Extension du théorème I à certains systèmes plus généraux de fonctions orthogonales.

On constate aisément que la démonstration du théorème I est basée uniquement sur deux propriétés essentielles du noyau $K_n(t, x)$. D'abord, c'est la représentabilité de la somme des $|s_\nu(x) - f(x)|$ dans la forme (4), ce qui est une conséquence de

$$\int_a^b \varrho(t) K_n(t, x)\, dt = 1 \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

relation dont la validité est assurée pour tout système $\{\varphi_n(x)\}$ de fonctions orthonormales si $\varphi_0(x)$ est une constante. Deuxièmement, les propriétés suivantes de la représentation du noyau $K_n(t, x)$ par la formule de Christoffel—Darboux: 1° $|K_n(t, x)|$ est majoré par une fonction $O(|t-x|^{-1})$, 2° $K_n(t, x)$ est de la forme

$$\frac{1}{t-x} \sum_{i,j=0}^{1} \gamma_{i,j}^{(n)} p_{n+i}(t) p_{n+j}(x)$$

où les $\gamma_{i,j}^{(n)}$ sont des constantes bornées dans leur ensemble. Ces propriétés du noyau $K_n(t, x)$ suggèrent la définition d'une classe de systèmes orthogonaux comprenant les polynômes orthogonaux et le système trigonométrique pour lesquels le théorème I conserve sa validité. Or cette généralisation n'est point construite seulement à ce but; au contraire, elle donne lieu à la généralisation de plusieurs théorèmes importants, connus il y a longtemps dans la théorie des séries de Fourier et démontrés, grâce aux propriétés indiquées du noyau $K_n(t, x)$, récemment pour les séries de polynômes orthogonaux. Tels sont p. ex. les théorèmes de convergence et de sommation dus à MM. SZ.-NAGY [3], TANDORI [4] et FREUD [2]. Leurs théorèmes sont valables pour la classe des développements orthogonaux que nous allons définir maintenant (v. aussi la remarque finale chez M. TANDORI [4], deuxième communication).

Appelons $\{\varphi_n(x)\}$ un système *quasi-polynomial*, si les fonctions $\varphi_n(x)$ sont orthonormales relativement à une fonction de poids $\varrho(x)$, $\varphi_0(x)$ est constante, et le noyau

$$K_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(t)\varphi_k(x)$$

est de la forme

$$K_n(t,x)=\sum_{k=1}^{r}F_k(t,x)\sum_{i,j=-p}^{p}\gamma_{i,j}^{(n,k)}\varphi_{n+i}(t)\varphi_{n+j}(x)$$

où p, r sont des entiers positifs indépendants de n et les $\gamma_{i,j}^{(n,k)}$ des constantes bornées dans leur ensemble, tandis que les fonctions $F_k(t,x)$ sont soumises à la condition

$$|F_k(t,x)|\leqq\frac{C_{12}(\delta)}{|t-x|}$$

pour tout point $x\in(a+\delta, b-\delta)$.

Les systèmes $\{p_n(x)\}$ de polynômes orthogonaux sont évidemment quasi-polynomiaux et on voit aisément que le système trigonométrique l'est aussi. On peut bien construire d'autres systèmes quasi-polynomiaux en orthogonalisant un système de fonctions indépendantes qui satisfont à une formule de récursion convenable. Tel est p. ex. le système que l'on obtient par l'orthogonalisation des puissances $g^n(x)$ $(n=0,1,\dots)$ d'une fonction mesurable et bornée $g(x)$ satisfaisant à la condition $|g(t)-g(x)|\geqq C_{13}|t-x|, C_{13}>0$. Le n-ième noyau est, dans ce cas, défini par la formule de Christoffel—Darboux, mais avec $g(t)-g(x)$ au lieu de $t-x$ au dénominateur.

En faisant de petits changements dans la démonstration, on voit aisément que le théorème I reste exact, si on y échange $\{p_n(x)\}$ pour un système quasi-polynomial $\{\varphi_n(x)\}$ satisfaisant à la condition (1). Le théorème I est donc applicable p. ex. au système trigonométrique et on peut alors choisir pour (a, b) et (c, d) le même intervalle de longueur 2π de position quelconque. Il en résulte que le théorème de M. BERNSTEIN cité à l'introduction tient même pour l'approximation au sens fort, lorsque $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

4. Approximation des fonctions appartenant à une classe de Lipschitz par leurs développements quasi-polynomiaux.

Si on prend pour $\{\varphi_n(x)\}$ un système quasi-polynomial quelconque en renonçant à la condition (1), on obtient un résultat concernant l'approximation presque partout.

Théorème III. *Soit* $\varrho(x)>0$ *presque partout,* $\{\varphi_n(x)\}$ *un système quasi-polynomial arbitraire et* (c, d) *un sous-intervalle de* (a, b) *où la fonction* $f\in L^2_{\varrho(x)}$ *satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* $0<\alpha<\frac{1}{2}$. *Si* $\{\lambda_n\}$ *est une suite non-décroissante de nombres positifs tels que* $\Sigma\lambda_n^{-2}<\infty$, *on a en* (c, d) *presque partout*

(8)
$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|s_\nu(x)-f(x)|=o\left(\frac{\lambda_n}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\right).$$

La démonstration ne diffère pas beaucoup de celle du théorème I. Remarquons d'abord que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b\varrho(x)\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}<\infty,$$

la série $\Sigma\varrho(x)\varphi_k^2(x)/\lambda_k^2$ converge donc presque partout. Il s'ensuit, grâce à un lemme connu (v. p. ex. A. ZYGMUND, *Trigonometrical series* (Warszawa-Lwów, 1935), p. 255) et vu que $\varrho(x)>0$ presque partout:

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi_k^2(x)=o(\lambda_n^2).$$

Pour évaluer les intégrales $I_{\nu 3}$, on constate que, pour $n\geqq n_0$,

$$I_{\nu 3}^2\leqq\sum_{k=0}^{\nu}\varphi_k^2(x)\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\varrho(t)O(|t-x|^{2\alpha})dt=o(\lambda_\nu^2)O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\varrho(t)dt$$

presque partout. Désignons par $\mathrm{P}(t)$ une intégrale de $\varrho(t)$, alors

$$\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\varrho(t)dt=\mathrm{P}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\mathrm{P}\left(x-\frac{1}{n}\right)=O_x\left(\frac{1}{n}\right)$$

pour presque tous les points x, notamment pour tous les points x auxquels $\varrho(x)=\mathrm{P}'(x)$, donc

(9)
$$\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu 3}|=\sum_{\nu=0}^{n}o(\lambda_\nu)O_x\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}\right)=o(\lambda_n\cdot n^{\frac{1}{2}-\alpha})$$

presque partout. Pour évaluer la somme des $|I_{\nu 1}|$, posons

$$g_k(t,x)=\begin{cases}[f(t)-f(x)]F_k(t,x) & \text{pour } t\in(a,c)\cup(d,b),\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

et nous obtenons

$$\sum_{\nu=0}^{n}|I_{\nu 1}| \leqq \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=-p} ^{p} \sum_{\nu=0}^{n} |\gamma_{i,j}^{(\nu,k)} \varphi_{\nu+j}(x)| \left| \int_a^b \varrho(t) g_k(t,x) \varphi_{\nu+i}(t)\,dt \right| =$$

$$= O(1) \sum_{k=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_{\nu+j}^2(x) \sum_{\nu=0}^{n} \left[\int_a^b \varrho(t) g_k(t,x) \varphi_{\nu+i}(t)\,dt \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1) \sum_{k=1}^{r} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n+p} \varphi_\nu^2(x) \cdot \int_a^b \varrho(t) g_k^2(t,x)\,dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{\nu=0}^{n} |I_{\nu 1}| = o(\lambda_{n+p}) = o(\lambda_n \cdot n^{\frac{1}{2}-\alpha}) \tag{10}$$

presque partout. Enfin, pour évaluer les sommes des $|I_{\nu 2}|$, posons

$$h_{kn}(t,x) = \begin{cases} [f(t)-f(x)]F_k(t,x) & \text{pour} \quad t \in \left(c, x-\frac{1}{n}\right) \cup \left(x+\frac{1}{n}, d\right), \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et il s'ensuit

$$\sum_{\nu=n_0}^{n} |I_{\nu 2}| = o(\lambda_n) \left\{ \left(\int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{d} \right) \frac{\varrho(t)}{|t-x|^{2-2\alpha}}\,dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

presque partout. En intégrant par parties on obtient

$$\int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{\varrho(t)\,dt}{|t-x|^{2-2\alpha}} \leqq \left[\frac{|\mathrm{P}(t)-\mathrm{P}(x)|}{|t-x|^{2-2\alpha}} \right]_c^{x-\frac{1}{n}} + 2 \int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{|\mathrm{P}(t)-\mathrm{P}(x)|}{|t-x|^{3-2\alpha}}\,dt =$$

$$= O_x(1) \left[\frac{1}{|t-x|^{1-2\alpha}} \right]_c^{x-\frac{1}{n}} + O_x(1) \int_c^{x-\frac{1}{n}} \frac{dt}{|t-x|^{2-2\alpha}} = O_x(n^{1-2\alpha})$$

presque partout et une évaluation analogue vaut pour l'intégrale étendue à $\left(x+\frac{1}{n}, d\right)$. Il en résulte

$$\sum_{\nu=n_0}^{n} |I_{\nu 2}| = o(\lambda_n \cdot n^{\frac{1}{2}-\alpha}) \tag{11}$$

presque partout. L'évaluation (8) est, pour presque tous les points $x \in (c, d)$, une conséquence de (4), (9), (10) et (11).

Ouvrages cités.

[1] BERNSTEIN, S., Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné, *Mémoires Acad. Roy. Belgique,* (2) **4** (1912), 1—104.

[2] FREUD, G., Über die starke (C, 1)-Summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **3** (1952), 83—88.

[3] SZ.-NAGY, B., Über die Konvergenz von Reihen orthogonaler Polynome, *Math. Nachrichten,* **4** (1951), 50—55.

[4] TANDORI, K., Über die Cesàrosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **3** (1952), 73—82 et II, *ibid.,* **5** (1954), 237—253.

(Reçu le 1 mars 1958.)

Über die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihen bei jeder Anordnung ihrer Glieder.

Von G. ALEXITS in Budapest.

1. Bezeichne $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges, im endlichen Intervall (a, b) definiertes System von normierten Orthogonalfunktionen. Den allgemeinen Orthogonalsystemen kann man offenbar keine natürliche Gliederanordnung zuschreiben, man hat also keinen Grund, daß man bei der Entwicklung einer Funktion $f \in L^2$ in die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

die zufällig vorliegende Anordnung der Reihenglieder einer anderen bevorzugt. Es ist viel natürlicher zu fragen, welchen Bedingungen die Koeffizienten c_n zu genügen haben, damit die Orthogonalreihe (1) bei beliebiger Anordnung der Reihenglieder fast überall konvergiert. ORLICZ [2] hat dafür verschiedene Kriterien angegeben. Weit nicht das allgemeinste, aber wohl das einfachste lautet folgenderweise (MENCHOFF [1] und ORLICZ [2]):

Konvergiert für ein $\varepsilon > 0$ die Reihe $\Sigma |c_n|^{2-\varepsilon}$, so ist die Orthogonalreihe (1) bei jeder Anordnung ihrer Glieder fast überall konvergent.

Was ist aber die Sachlage, wenn man hier die feste Konstante $\varepsilon > 0$ durch eine positive, monoton gegen Null konvergente Zahlenfolge $\{\alpha_n\}$ ersetzt? Auf diese Frage möchten wir im folgenden eine Antwort geben:

Satz I. *Sei $|c_{m_n}|$ die in monoton abnehmende Anordnung gestellte Folge der nicht verschwindenden Koeffizienten. Ist*

$$\alpha_n \geqq (4+\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log n} \qquad (\varepsilon > 0), \tag{2}$$

so folgt aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_{m_n}|^{2-\alpha_n} < \infty \tag{3}$$

die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihe (1) *bei jeder Anordnung ihrer Glieder.* (Wir bezeichnen mit $\log n$ den Logarithmus mit der Basis 2.)

Es ist bemerkenswert, daß der Faktor $4+\varepsilon$ in der Bedingung (2) nicht verschärft werden kann. Wir werden nämlich auch den folgenden Satz beweisen:

Satz II. *Ist für ein* $\varepsilon>0$

$$\alpha_n \leqq (4-\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log n} \qquad (n \geqq 2), \tag{4}$$

so gibt es eine überall divergente Orthogonalreihe $\Sigma c_n \Phi_n(x)$, *deren Koeffizienten eine positive, monoton abnehmende Folge bilden und der Bedingung* (3) *genügen.*

2. Wir bemerken zum Beweise des Satzes I, daß aus der Monotonie der Folge $\{c_{m_n}^2\}$ und $\Sigma c_{m_n}^2 < \infty$ für alle genügend große Indizes $c_{m_n}^2 \leqq n^{-1}$, also

$$\log\frac{1}{c_{m_n}^2} \geqq \log n$$

folgt. Bei Beachtung von (2) ergibt sich somit für genügend große n die Abschätzung

$$\alpha_n \geqq (4+\varepsilon)\frac{\log\log n}{\log\dfrac{1}{c_{m_n}^2}}.$$

Ist N schon so groß, daß auch $\varepsilon\log\log N \geqq 4\log\log\log N$ gesetzt werden darf, so läßt sich für $n \geqq N$ aus der vorangehenden Abschätzung auf

$$\frac{\alpha_n}{2}\log\frac{1}{c_{m_n}^2} \geqq 2(\log\log n + \log\log\log n)$$

schließen. Daraus folgt

$$\left(\frac{1}{c_{m_n}^2}\right)^{\frac{\alpha_n}{2}} \geqq (\log\log n)^2\log^2 n,$$

oder anders geschrieben:

$$|c_{m_n}|^{-\alpha_n} \geqq (\log\log n)^2\log^2 n.$$

Aus (3) ergibt sich mithin

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_{m_n}^2(\log\log n)^2\log^2 n \leqq \sum_{n=N}^{\infty}|c_{m_n}|^{2-\alpha_n} < \infty.$$

Nach einem Satz von Orlicz [2] zieht aber die Konvergenz der links stehenden Reihe die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihe (1) bei jeder Anordnung ihrer Glieder nach sich, und hiermit ist der Satz I bewiesen.

3. Um auch den Satz II zu beweisen, setzen wir

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2^m m^3}} \qquad (2^m \leqq n < 2^{m+1})$$

für $m = 2, 3, \ldots$. Dann ist

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 \log^2 n = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{2^m m^3} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \log^2 n \geqq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty.$$

Da $\{c_n\}$ monoton abnimmt und $\sum_{n=4}^{\infty} c_n^2 \log n$ divergiert, gibt es nach TANDORI [3] ein Orthogonalsystem $\{\Phi_n(x)\}$, so daß die Reihe

$$\sum_{n=4}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$$

überall divergiert. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß die Beziehung (3) unter der Bedingung (4) erfüllt ist. In der Tat gilt wegen der monotonen Abnahme von $\{\alpha_n\}$

$$\sum_{n=4}^{\infty} |c_n|^{2-\alpha_n} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{2^m m^3} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} 2^{\frac{m\alpha_n}{2}} m^{\frac{3\alpha_n}{2}} \leqq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^3} 2^{\frac{1}{2} m \alpha_{2^m}} m^{\frac{3}{2}\alpha_{2^m}}.$$

Nach (4) ist aber

$$\alpha_{2^m} \leqq (4-\varepsilon) \frac{\log m}{m},$$

also $m^{\frac{3}{2}\alpha_{2^m}} = O(1)$ und

$$2^{\frac{1}{2} m \alpha_{2^m}} = m^{2-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Somit folgt

$$\sum_{n=4}^{\infty} |c_n|^{2-\alpha_n} = \sum_{m=2}^{\infty} O\left(\frac{1}{m^{1+\varepsilon/2}}\right) < \infty,$$

w. z. b. w.

4. Aus dem Gang des Beweises ist ersichtlich, daß man in Satz I

$$\alpha_n \geqq 4 \frac{\log\log n + \log\log\log n}{\log n}$$

und in Satz II

$$\alpha_n \leqq 4 \frac{\log\log n - \log\log\log n}{\log n}$$

wählen darf. Die Frage, ob etwa

$$\alpha_n = 4 \frac{\log\log n}{\log n}$$

der "richtige" Exponent ist, welcher den Konvergenzfall vom Divergenzfall scheidet, scheint sehr schwer zu sein.

Bemerken wir noch, daß der Satz von TANDORI, auf welchem unsere Divergenzkonstruktion beruht, auch dann richtig bleibt, wenn $\{\Phi_n(x)\}$ beschränkt vorausgesetzt wird. Unser Satz II bleibt also ebenfalls richtig, wenn man der Betrachtung nur beschränkte Orthonormalsysteme zuläßt.

Schrifttum.

[1] D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales. III, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 375—420.

[2] W. ORLICZ, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bulletin intern. Acad. Sci. Polonaise Cracovie, Sect. A*, **1927**, 81—115.

[3] K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957) 57—130.

(Eingegangen am 25. März 1958.)

Eine Ungleichung für Tschebyscheffsche Approximationspolynome.

Von G. FREUD in Budapest.

Es sei $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ein Tschebyscheffsches Funktionensystem, d.h. eine Folge von Funktionen, welche im endlichen Intervall $[a, b]$ stetig sind und für welche jedes nicht identisch verschwindende f-Polynom $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k$ in $[a, b]$ höchstens $n-1$ Nullstellen besitzt. (Vgl. N. I. ACHIESER [1] § 43—48.) Nach einem Satz von A. HAAR [2] gibt es zu jeder in $[a, b]$ definierten stetigen Funktion $F(x)$ ein eindeutig bestimmtes f-Polynom $P(F; x)$, welches unter allen f-Polynomen die kleinste Abweichung von F in der Metrik C besitzt:

$$E(F) = \max_{x\in[a,b]} |F(x)-P(F;x)| \leqq \max_{x\in[a,b]} |F(x)-\Sigma a_k f_k(x)|,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für $\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \equiv P(f; x)$.

Satz. *Es seien $F_0(x)$, $F(x)$ in $[a, b]$ stetige Funktionen mit*

$$|F(x)-F_0(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad x\in[a, b]. \tag{1}$$

Dann besteht die Ungleichung

$$|P(F;x)-P(F_0;x)| \leqq A\varepsilon \quad \text{für} \quad x\in[a, b], \tag{2}$$

wobei die Zahl A von F_0 und vom System $\{f_i\}$ abhängt, aber von F und ε unabhängig ist.

Aus diesem Satze kann man z.B. sofort ablesen, daß wenn $F_\lambda(x)$ in beiden Veränderlichen λ und x stetig ist, dann auch $P(F_\lambda; x)$ in λ stetig ist. Im speziellen Falle der gewöhnlichen Polynome wurde dieser Satz von C. DE LA VALLÉE POUSSIN [3] bewiesen. Der hier angeführte Beweis scheint einfacher zu sein.

Beweis. Es gibt $n+1$ verschiedene Stellen $x_i\in[a, b]$ $(i=0, 1, \ldots, n;$ $x_i < x_{i+1})$, für welche

$$\gamma(-1)^i[F(x_i)-P(F; x_i)] = E(f) \quad (\gamma = +1 \text{ oder } \gamma = -1) \tag{3}$$

gültig ist (vgl. ACHIESER [1] § 48).

Aus (1) folgt

$$|F(x)-P(F_0;x)| \leqq |F(x)-F_0(x)|+|F_0(x)-P(F_0;x)| \leqq E(F_0)+\varepsilon,$$

also[1])

$$E(F) \leqq E(F_0)+\varepsilon. \tag{4}$$

Hieraus folgt, wenn man (3) und (4) berücksichtigt,

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma(-1)^{k+1}[P(F;x_k)-P(F_0;x_k)] \leqq |P(F;x_k)-F(x_k)|+|F(x_k)-F_0(x_k)|+\\ &\qquad+\gamma(-1)^{k+1}[F_0(x_k)-P(f_0,x_k)] \leqq E(F)+\varepsilon-E(F_0) \leqq 2\varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Es seien nun $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ $(i=1,2,\dots,n)$ verschiedene Stellen in $[a,b]$. Das homogene Gleichungssystem $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k f_k(\xi_i)=0$ $(i=1,2,\dots,n)$ besitzt keine nichttriviale Lösung in den γ_k, da ein f-Polynom nicht mehr als $n-1$ Nullstellen besitzen kann, ohne daß es identisch verschwindet. Hieraus folgt, daß die determinante $|f_k(\xi_i)|$ von Null verschieden ist. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes f-Polynom $L(x)$, welches an den Stellen ξ_i die beliebig vorgeschriebenen Werte λ_i annimmt, und es kann, wie man leicht zeigt, in der Form

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i l_i(x) \tag{6}$$

dargestellt werden. Wir nennen (6) die Lagrangesche Interpolationsformel der f-Polynome und $l_i(x)$ die Lagrangeschen f-Parabeln zum Grundpunktsystem $\{\xi_i\}$. Es gilt

$$l_i\{\xi_k\}=\begin{cases} 1 & \text{für } i=k,\\ 0 & \text{für } i \neq k,\end{cases}$$

und in der Nähe jeder von ξ_i verschiedenen Stelle $\xi_k \in (a,b)$ ändert l_i sein Vorzeichen (vgl. [1]),

$$\operatorname{sign} l_i(x)=\begin{cases} (-1)^{i-j} & \text{für } \xi_i < x \in (\xi_j, \xi_{j+1}),\\ (-1)^{i-j+1} & \text{für } \xi_i > x \in (\xi_j, \xi_{j+1}).\end{cases} \tag{7}$$

Wir wollen als Grundpunktsystem $\{\xi_i\}$ die Folge $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n$ wählen, wobei x_i die in der Formel (3) auftretenden Punkte sind. Die zu x_k gehörige Lagrangesche Parabel nennen wir jetzt $L_k(x)$ $(k \neq n)$. Für $x \in (x_r, x_{r+1})$ erhält man aus (7)

$$\operatorname{sign} L_k(x)=(-1)^{k-r+1} \qquad (k \neq r). \tag{7a}$$

Schreibt man die Lagrangesche Interpolationsformel für das f-Polynom

1) Ebenso erhält man auch $E(F_0) \leqq E(F)+\varepsilon$. Hieraus folgt, daß $E(F)$ als Funktion der Elemente des C-Raumes stetig ist. Insbesondere ist $E(F_\lambda)$ in λ stetig, falls $F_\lambda(x)$ in beiden Variabeln x und λ stetig ist.

$\psi(x) \equiv \gamma[P(F;x) - P(F_0;x)]$ auf, dann ergibt sich aus (7a) und (5) für $x \in (x_r, x_{r+1})$:

(8a)
$$(-1)^r \psi(x) = (-1)^r \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{n} \psi(x_k) L_k(x) = \\ = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \psi(x_k) |L_k(x)| \leqq 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{n} |L_k(x)| \varepsilon.$$

Wählt man als Grundpunktsystem $x_0, x_1, \ldots, x_r, x_{r+2}, \ldots, x_n$ und nennt die entsprechende Lagrangesche Parabel $L_k^*(x)$ $(k \neq r+1)$, so erhält man für $x \in (x_r, x_{r+1})$

(7b) $$\operatorname{sign} L_k^*(x) = (-1)^{k-r} \qquad (k \neq r+1),$$

und hieraus folgt für $x \in (x_r, x_{r+1})$ mit demselben Schluß wie in (8a)

(8b) $$(-1)^{r+1} \psi(x) \leqq 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq r}}^{n} |L_k^*(x)| \varepsilon.$$

Aus Stetigkeitsgründen sind (8a) und (8b) auch für $x = x_r$ und $x = x_{r+1}$ gültig.

(8a) und (8b) zusammen ergeben eine Abschätzung von $|P(F;x) - P(F_0;x)|$ für $x \in [x_0, x_n]$. Es müssen noch die Intervalle $[a, x_0)$ und $(x_n, b]$ betrachtet werden; in diesen Intervallen erhält man ebenfalls Ungleichungen von der Form (8a) und (8b), indem man als Grundpunkte einmal $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, das andere Mal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wählt.

Herrn Dr. F. Pták (Prag) bin ich für die Fragestellung zu Dank verpflichtet.

Literatur.

[1] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации (Москва—Ленинград, 1947). Deutsche Übersetzung: N. I. Achieser, *Vorlesungen über Approximationstheorie* (Berlin, 1956).

[2] A. Haar, Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, *Math. Annalen*, **78** (1918), 294—311.

[3] Ch. J. de la Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (Paris, 1919).

(Eingegangen am 12. Februar 1958.)

On almost orthogonal operators in L^p-spaces.

By MISCHA COTLAR and RAFAEL PANZONE in Buenos Aires (Argentina).

Let $K_1(x), \ldots, K_N(x)$ be integrable functions defined on the n-dimensional Euclidean space $E^n = \{x\}$, $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ (we shall also identify the point x with the vector Ox and use vector notations such as $x-y, |x| = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{1/2}$), and let

$$T_i f = f * K_i = \int_{E^n} f(y) K_i(x-y)\, dy, \tag{1}$$

$$K(x) = K_1(x) + \cdots + K_N(x), \tag{2}$$

$$Tf = f * K = \sum T_i f = \int_{E^n} f(y) K(x-y)\, dy, \tag{3}$$

$$K_{ij}(x) = K_i * K_{i+j}(x) \qquad (1 \leqq i \leqq i+j \leqq N), \tag{4}$$

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p\, dx \right\}^{1/p} \qquad (dx = d\xi_1 \ldots d\xi_n). \tag{5}$$

In a previous paper [1] one of the authors proved the following

Theorem A. *If the kernels K_{ij} satisfy the conditions*

$$\|K_{ij}\|_1 \leqq c \cdot \varepsilon^j \qquad (1 \leqq i \leqq i+j \leqq N), \tag{6}$$

where $0 \leqq \varepsilon < 1$, and if $f \in L^2(E^n)$, then

$$\|f * K\|_2 \leqq c_1 \|f\|_2, \qquad c_1 = c_1(\varepsilon, c), \tag{7}$$

where the constant c_1 depends on ε and c only, and not on N.

(Since T_i are operators on L^2 with $\|T_i\| \leqq \|K_i\|_1$, and since (6) implies $\|T_i T_{i+j}\| \leqq c \cdot \varepsilon^j$, we say that the T_i are "almost orthogonal" operators on L^2). B. Sz.-Nagy [2] gave a very simple proof of Theorem A (and of a more general theorem) by reducing it to the following numerical lemma:

Lemma A. *For any sum $s = v_1 + \cdots + v_N$ of real numbers with $|v_i v_{i+j}| \leqq \varepsilon^j$ $(1 \leqq i \leqq i+j \leqq N)$, it is true that $s \leqq c(\varepsilon)$.*

Here we give the following generalizations of Theorem A to L^p-spaces and to subspaces of E^n:

Theorem B. *Let $0 \leqq \gamma < n =$ dimension of E^n. Let the kernels K_{ij} satisfy the conditions*

(8) $$\int_{E^n} |K_{ij}(x+h) - K_{ij}(x)|\, dx \leqq c \cdot \varepsilon^j \cdot |h|^{2\gamma} \qquad (1 \leqq i \leqq i+j \leqq N),$$

for an ε, $0 \leqq \varepsilon < 1$, and for every $h \in E^n$, if $p = 2n/(n+\gamma)$, $1/p + 1/q = 1$, then

(9) $$\|f * K\|_q \leqq c_1 \cdot \|f\|_p$$

holds for every $f \in L^p(E^n)$, where c_1 depends on ε, γ and c only.

(Theorem B reduces to Theorem A for $\gamma = 0$ and $p = 2$.)

Theorem C. *Let $0 \leqq \gamma < n$, $m < n < m + 2\gamma$, $E^m \subset E^n$. Let in formula (3) y vary in E^n and x in E^m, so that f and K are defined in E^n, while $F(x) = f * K$ is considered as a function defined in E^m. Then, if the kernels K_{ij} satisfy conditions (8), we have for every $f \in L^p(E^n)$*

(10) $$\|F\|_q^{(m)} = \|f * K\|_q^{(m)} \leqq c_1 \|f\|_p^{(n)}, \qquad c_1 = c_1(\varepsilon, \gamma, c),$$

where $p = (n+m)/(m+\gamma)$, $1/p + 1/q = 1$, and

$$\|F\|_q^{(m)} = \left\{ \int_{E^m} |F(x)|^q\, dx \right\}^{1/q}.$$

Theorem D. *Let $0 \leqq \gamma < m$, $m < n < m + 2\gamma$, $E^m \subset E^n$. Let in formula (3) y vary in E^m and x in E^n, so that f is defined on E^m, while K and $F = f * K$ are defined on E^n. Then, if the kernels K_{ij} satisfy conditions (8), we have*

(11) $$\|F\|_q^{(n)} = \|f * K\|_q^{(n)} \leqq c_1 \|f\|_p^{(m)}, \quad c_1 = c_1(\varepsilon, \gamma, c),$$

for every $f \in L^p(E^m)$, where $p = (n+m)/(m+\gamma)$, $1/p + 1/q = 1$.

Theorems B, C, D are easy consequences of Lemma A and the following lemmas:

Lemma B. *Let $0 \leqq \gamma < n$. Let $f(x)$, $K(x)$ and $F(x) = f * K$ be defined on E^n, and assume that*

(12) $$|u|^\gamma \cdot |\hat{K}(u)| \leqq c$$

holds for all $u \in E^n$, where $\hat{K}$ is the Fourier transform of K. Then

(13) $$\|f * K\|_q \leqq c_1 \|f\|_p, \quad c_1 = c_1(\gamma, c),$$

with $p = 2n/(n+\gamma)$, $1/p + 1/q = 1$.

Lemma C. *Let* $0 \leqq \gamma < n$, $m < n < m + 2\gamma$, $E^m \subset E^n$. *Let* f, K *be defined on* E^n *while* $F = f * K$ *is considered as defined on* E^m. *Then, if the kernel* K *satisfies condition* (12), *it is true that*

$$\|f * K\|_q^{(m)} \leqq c_1 \|f\|_p^{(n)}, \quad c_1 = c_1(\gamma, c), \tag{14}$$

with $p = (m+n)/(m+\gamma)$, $1/p + 1/q = 1$.

Lemma D. *Let* $0 \leqq \gamma < m$, $m < n < m + 2\gamma$, $E^m \subset E^n$. *Let* f *be defined on* E^m, *while* K *and* $F = f * K$ *are defined on* E^n, *and let the kernel* K *satisfy condition* (12) *for all* $u \in E^n$. *Then*

$$\|f * K\|_q^{(n)} \leqq c_1 \|f\|_p^{(m)}, \tag{15}$$

with $p = (n+m)/(m+\gamma)$, $1/p + 1/q = 1$.

Proof of Lemma B. For every function $g \in L^p(E^n)$ and $1/p + 1/q = 1$, $1 < p \leqq 2$, we have the following classical inequalities of Hausdorff—Young and Hardy—Littlewood—Paley ([3], Chap. 9):

$$\left\{ \int_{E^n} |g(x)|^q \, dx \right\}^{1/q} \leqq \left\{ \int_{E^n} |\hat{g}(u)|^p \, du \right\}^{1/p}, \qquad \int_{E^n} |\hat{g}(u)|^p |u|^{n(p-2)} \, du \leqq c_p \int_{E^n} |g(x)|^p \, dx,$$

where $\hat{g}$ is the Fourier transform of g. Using these inequalities and hypothesis (12), and taking in account that $p = 2n/(n+\gamma)$, $p\gamma = n(2-p)$, we obtain

$$\|f * K\|_q = \|F\|_q \leqq \left\{ \int_{E^n} |\hat{F}(u)|^p \, du \right\}^{1/p} = \left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^p |\hat{K}(u)|^p \, du \right\}^{1/p} \leqq$$

$$\leqq c \left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^p |u|^{-p\gamma} \, du \right\}^{1/p} = c \left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^p |u|^{n(p-2)} \, du \right\}^{1/p} \leqq c_1 \|f\|_p.$$

Proof of Lemma C. Now f and K are defined on E^n, and $f * K$ on E^m, $m < n$. Let $E^m = \{t\} = \{x\} = \{v\}$, $E^{n-m} = \{z\} = \{w\}$, $E^n = E^m \times E^{n-m} = \{y\} = \{(t, z)\} = \{u\} = \{(v, w)\}$, and let $f(y) = f(t, z)$. Then

$$F(x) = \int_{E^m} dt \int_{E^{n-m}} f(t, z) \, K(x - t, -z) \, dz \tag{16}$$

and

$$\hat{F}(v) = \int_{E^m} F(x) e^{i(x,v)} \, dx = \int_{E^m} e^{i(x,v)} dx \int_{E^m} dt \int_{E^{n-m}} f(t, z) \, K(x-t, -z) \, dz =$$

$$= \int_{E^{n-m}} dz \int_{E^m} f_z(t) \, dt \int_{E^m} K(x, -z) \, e^{i(x,v)} e^{i(t,v)} \, dx = \int_{E^{n-m}} \hat{f}_z(v) \, \hat{K}_{-z}(v) \, dz, \tag{17}$$

where $f_z(v)$ is the Fourier transform of $f_z(t)$, considered as a function of t with fixed z. Hence

$$(17a) \qquad |\hat{F}(v)| \leqq \left\{ \int_{E^{n-m}} |\hat{f}_z(v)|^p \, dz \right\}^{1/p} \left\{ \int_{E^{n-m}} |\hat{K}_z(v)|^q \, dz \right\}^{1/q}.$$

Here $\varphi_v(z) = \hat{K}_z(v)$ is the Fourier transform of $K_z(t)$. If we take now the Fourier transform $\hat{\varphi}$ of $\varphi_v(z)$, considered as a function of z, we obtain

$$\hat{\varphi}_v(w) = \int_{E^{n-m}} \hat{K}_z(v) e^{i(z,w)} dz = \int_{E^{n-m}} \int_{E^m} K(t,z) e^{i(t,v)} e^{i(z,w)} dt\, dz =$$
$$= \int_{E^n} K(y) e^{i(y,u)} dy = \hat{K}(u) = \hat{K}(v,w).$$

Hence, applying Hausdorff—Young inequality to $\varphi_v(z)$ and taking into account that $|\hat{K}(u)| \leqq c|u|^{-\gamma} = c(|v|^2 + |w|^2)^{-\gamma/2}$, we shall have

$$\left\{ \int_{E^{n-m}} |\hat{K}_z(v)|^q dz \right\}^{1/q} \leqq \left\{ \int_{E^{n-m}} |\hat{\varphi}_v(w)|^p dw \right\}^{1/p} = \left\{ \int_{E^{n-m}} |\hat{K}(v,w)|^p dw \right\}^{1/p} \leqq$$

$$(18) \qquad \leqq c \left\{ \int_{E^{n-m}} (|v|^2 + |w|^2)^{-p\gamma/2} dw \right\}^{1/p} = c \left\{ |v|^{n-m-p\gamma} \int_{E^{n-m}} (1+|w|^2)^{-p\gamma/2} dw \right\}^{1/p}.$$

Since $p = (m+n)/(m+\gamma)$ and $n < m + 2\gamma$, we have $p < 2$ and $p\gamma = n + m - pm > n - m$, and the last integral of (18) is finite, and since $n - m - p\gamma = n(p-2)$, we obtain from (17a) and (18), that

$$|\hat{F}(v)| \leqq c_1 |v|^{n(p-2)/p} \left\{ \int_{E^{n-m}} |\hat{f}_z(v)|^p dz \right\}^{1/p}.$$

Hence, using the inequalities of Hausdorff—Young and of Hardy—Littlewood—Paley, we obtain

$$\|F\|_q^{(m)} \leqq \left\{ \int_{E^m} |\hat{F}(v)|^p dv \right\}^{1/p} \leqq c_1 \left\{ \int_{E^m} \left[|v|^{n(p-2)} \int_{E^{n-m}} |\hat{f}_z(v)|^p dz \right] dv \right\}^{1/p} =$$

$$= c_1 \left\{ \int_{E^{n-m}} dz \int_{E^m} |\hat{f}_z(v)|^p |v|^{n(p-2)} dv \right\}^{1/p} \leqq c_2 \left\{ \int_{E^{n-m}} dz \int_{E^m} |f(t,z)|^p dt \right\}^{1/p} = c_2 \|f\|_p^{(n)}.$$

P r o o f of L e m m a D. Let $E^n = E^m \times E^{n-m}$, $E^m = \{t\} = \{y\} = \{v\}$, $E^{n-m} = \{z\} = \{w\}$, $E^n = \{x\} = \{(y,z)\} = \{u\} = \{(v,w)\}$, so that

$$F(x) = F(y,z) = \int_{E^m} f(t)\, K(y-t, z)\, dt$$

and

$$\hat{F}(u)=\hat{F}(v,w)=\int_{E^n} e^{i(x,u)}\,dx\int_{E^m} f(t)\,K(y-t,z)\,dt=$$

(19)
$$=\int_{E^m} e^{i(y,v)}\,dy\int_{E^{n-m}} e^{i(z,w)}\,dz\int_{E^m} f(t)\,K(y-t,z)\,dt=\hat{f}(v)\,\hat{K}(v,w).$$

Using (12) and taking in account that $p\gamma=n+m-pm>n-m$, we have

(20)
$$\int_{E^{n-m}} |\hat{K}(v,w)|^p\,dw \leqq c\int_{E^{n-m}} (|v|^2+|w|^2)^{-p\gamma/2}\,dw=$$
$$=c\int_{E^{n-m}} |v|^{n-m-p\gamma}(1+|w|^2)^{-p\gamma/2}\,dw=c_1\,|v|^{m(p-2)}.$$

Hence, using (19) and (20), we obtain

$$\|F\|_q^{(n)}\leqq\left\{\int_{E^n}|\hat{F}(u)|^p\,du\right\}^{1/p}=\left\{\int_{E^{n-m}}\int_{E^m}|\hat{F}(v,w)|^p\,dv\,dw\right\}^{1/p}=$$
$$=\left\{\int_{E^m}|\hat{f}(v)|^p\,dv\int_{E^{n-m}}|\hat{K}(v,w)|^p\,dw\right\}^{1/p}\leqq$$
$$\leqq c_1\left\{\int_{E^m}|\hat{f}(v)|^p\,|v|^{m(p-2)}\,dv\right\}^{1/p}\leqq c_2\left\{\int_{E^m}|f(y)|^p\,dy\right\}^{1/p}=c_2\,\|f\|_p^{(m)}.$$

P r o o f o f T h e o r e m s B, C, D. In virtue of lemmas B, C, D it is sufficient to prove that the hypothesis (8) implies condition (12). For any function $g(y)$, $y\in E^n$, we have

$$\hat{g}(u)=\int_{E^n} g(y)\,e^{i(y,u)}\,dy,\quad \hat{g}(u)\,e^{i(h,u)}=\int_{E^n} g(y-h)\,e^{i(y,u)}\,dy,$$

$$|\hat{g}(u)(1-e^{i(h,u)})|\leqq\int_{E^n}|g(y-h)-g(y)|\,dy.$$

Letting $h=u/|u|^2$, so that $|h|=1/|u|$, and $g=K_{ij}$, we obtain from (8) that

$$|\hat{K}_{ij}(u)|\leqq c\cdot\varepsilon^j\,|u|^{-2\gamma}.$$

Since $K_{ij}=K_i * K_{i+j}$, we obtain $|\hat{K}_i(u)|\,|\hat{K}_{i+j}(u)|\leqq c\,\varepsilon^j\,|u|^{-2\gamma}$, or

(21)
$$\left(|\hat{K}_i(u)|\,|u|^\gamma\right)\cdot\left(|\hat{K}_{i+j}(u)|\,|u|^\gamma\right)\leqq c\varepsilon^j.$$

Applying Lemma A we obtain from (21) that

$$|\hat{K}(u)|\,|u|^\gamma\leqq\sum|\hat{K}_i(u)|\,|u|^\gamma\leqq c_1(\varepsilon,c).$$

This proves the theorems.

Applications. *a)* Let $K(x)=\sum_{1}^{\infty} K_i(x)$ and assume that all $K_i(x) \geqq 0$ and that (8) holds for all $i, j < \infty$. Then, since $|f * K(x)| \leqq \sum |f| * K_i(x)$, we deduce easily that Theorems B, C, and D apply to the operator $f * K$.

b) Let $y=(y_1, \dots, y_n)$ and consider the operator

$$H_{\gamma n} f(x) = F(x) = \overbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}^{n} f(y) \cdot |x-y|^{\gamma-n}\, dy_1 \cdots dy_n, \tag{22}$$

with $0 < \gamma \leqq n$. Let $K_i(y)=|y|^{\gamma-n}$ if $2^i \leqq |y| < 2^{i+1}$, and zero otherwise, and let $K=\sum_{-\infty}^{\infty} K_i$. Then

$$H_{\gamma n} f = F = f * K. \tag{22a}$$

It is easy to check that the kernels K_i thus defined satisfy conditions (8), and thus we obtain the following

Corollary. *The inequalities* (9), (10) *and* (11) *are true for the operator* $H_{\gamma n} f$.

For $m=n=1$, the corollary is a special case of a theorem of HARDY—LITTLEWOOD [3], and for $m=n>1$ it is a special case of a theorem due to SOBOLIEFF [4]. For $m<n$ and with E^m, E^n replaced by bounded sets, as well as with q replaced by $s<q$, it was proved by SOBOLIEFF [5], who proposed the full inequality (10) as a problem. The part $m>n$ of the Corollary is probably new. More general and complete results of this kind are given in [6].

Generalizations. 1. The inequality of HAUSDORFF—YOUNG used in the above proofs, is a particular case of the following more general inequality, due to PITT [7]:

$$\|\hat{f}\|_q \leqq \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p |x|^{n\alpha p} dx \right\}^{1/p}, \quad 0 \leqq \alpha < 1-\frac{1}{p}, \quad q \geqq p, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1-\alpha.$$

Using this inequality in the above proofs, we will obtain that the hypothesis (8) implies the inequality (9) for any (p, q) such that $1/p-1/q=\gamma/n$. However, since PITT's theorem imposes the restriction $1<p \leqq 2$, $0 \leqq \alpha < 1-1/p$, the proof applies only for p such that $1/2 \leqq p \leqq 1/2+\gamma/2n$ (for instance, if $\gamma=0$, the proof applies only for $p=2$). Similiar remarks apply to Theorems C and D. It would be interesting to extend the above proofs also to the values p with $1/p \geqq \frac{1}{2}+\gamma/2n$.

2. In the case $\gamma=0, p=2$, Theorem A remains true (see [1] or [2]) if the operators $T_i f = f * K_i$ are replaced by arbitrary hermitean operators on L^2 (or on a Hilbert space). It would be interesting to obtain similiar generalizations of Theorems B, C, D, in terms of operator theory.

References.

[1] M. Cotlar, A combinatorial lemma and its applications to L^2-spaces, *Revista Mat. Cuyana*, **1** (1955), 41—55.

[2] Béla Sz.-Nagy, Note on sums of almost orthogonal operators, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957). 189—191.

[3] A. Zygmund, *Trigonometrical series* (Warszawa, 1935).

[4] S. Sobolieff, Sur un théorème de l'analyse Fonctionnelle, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS*, **20** (1938), 5—9.

[5] S. Sobolieff, *Some applications of the Functional Analysis to Mathematical Physics* (Leningrad, 1950, in Russian).

[6] M. Cotlar and R. Panzone, Generalized potential operators (to appear in *Revista Math. Cuyana*).

[7] H. Pitt, Theorems on Fourier and power series, *Duke Math. Journal*, **3** (1937), 747—755.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

(Received April 10, 1958.)

Separation of two linear subspaces.

By CHANDLER DAVIS[1]) in Princeton, N. J. (U. S. A)

A pair of non-trivial linear subspaces of Euclidean 3-space, whose dimensionalities are known, forms a geometrical figure which is determined up to Euclidean congruence by the non-obtuse angle between them — single number between 0 and $\pi/2$.

The situation is not so simple in Euclidean n-space, $n > 3$, but the proper generalization has been known since early in the history of study of these spaces [14, § 48]. For example, given two 2-dimensional subspaces $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ of 4-space, intersecting in a single point 0; then there exist perpendicular 2-subspaces $\mathfrak{E}_1$ and $\mathfrak{E}_2$, intersecting in 0, each intersecting $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ perpendicularly in a line; the angles θ_i $(0 < \theta_i \leqq \pi/2)$ between $\mathfrak{E}_i \cap \mathfrak{P}$ and $\mathfrak{E}_i \cap \mathfrak{Q}$ may have any values independently; these two numbers are determined uniquely by the figure $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ and determine it up to congruence.

This behavior does generalize directly, not only to complex finite-dimensional Hilbert spaces, but also, with the natural changes, to infinite-dimensional real and complex Hilbert spaces. Because of the decomposition (essentially) into orthogonal 2-spaces which do not interfere with each other, much of the geometry of a pair of subspaces is like that of a pair of lines.

Why then should there be an article written about it? For three reasons: (1) To establish the decomposition described in full generality (§ 5). This result is due to DIXMIER [4, Chap. I], [3]. (2) In infinite-dimensional spaces the decomposition is not quite into 2-dimensional subspaces $\mathfrak{E}_i$ as above (because C below may have continuous spectrum). Therefore many general facts which might be provable as corollaries of the decomposition, together with facts about angles in 2-space, must instead be proved as *generalizations* of the trigonometric facts. Of this sort are most of §§ 3—6. Some of the main results are due to DIXMIER[2]) and others, and some simple

[1]) Fellow of the National Science Foundation (U. S. A.).

[2]) There is enough overlap with [3] in particular that I give a partial glossary of terms: my C, S, and $\mathfrak{Y}$ are DIXMIER's A^2, B^2, and V_0. The development is rather different, both in methods and in subjects treated. (Cf. e. g. my Thm. 4.1 with his Thm. 1.)

facts have been known for years to me and doubtless to others. I have not collected all known theorems which would fit in, but I hope I have simplified the subject by basing it on the "closeness" and "separation" operators, generalizing trigonometric functions (§ 2). (3) Some of the results, since they concern distinctions which cannot be made in 2-space, cannot be proved even in n-space by reducing them to 2-space problems *via* the decomposition. This applies in particular to § 7, and to the intended sequel [2] on several numerical measures for the separation of two subspaces.

The geometry is simple as long as only two subspaces — or, equivalently, two hermitian projections, or two symmetries — are involved. If there are more than two, it is inevitably complicated. Here are two indications: Every unitary operator on an infinite-dimensional Hilbert space is a product of four symmetries [8]; the algebra of all bounded operators on a finite- or denumerable-dimensional Hilbert space can be generated by three projections [1].

1. Notations. The Hilbert space $\mathfrak{H}$ is in much of what follows of arbitrary dimensionality, and either real or complex. Specializations will be mentioned when they are made. P, Q are hermitian projections, and other bounded operators also are denoted by capital letters. Subspaces are denoted by the same letters as the projections onto them, but in gothic type: $P\mathfrak{H}=\mathfrak{P}$. Always $\tilde{P}=1-P$, accordingly $\tilde{\mathfrak{P}}=\tilde{P}\mathfrak{H}=\mathfrak{P}^{\perp}$; similarly $\tilde{Q}$, etc. $P\cap Q$ and $P\cup Q$ are the meet and join respectively of P and Q in the lattice of projections; accordingly, $\mathfrak{P}\cup\mathfrak{Q}$ is not the set-union of $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$. The symbol "$\leftrightarrow$" means "commutes with". $\mathfrak{N}(A)$ is the nullspace of A.

2. Closeness and separation operators [1]. Given any two hermitian projections P, Q, consider the *closeness operator*

(2. 11) $$C=C(P,Q)=PQP+\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{P}$$

and the *separation operator*

(2. 12) $$S=S(P,Q)=P\tilde{Q}P+\tilde{P}Q\tilde{P}$$

associated with P and Q. For 1-subspaces of 2-space, C is constant $=\cos^2\theta$, where θ is (either) angle between them; similarly $S=\sin^2\theta$. This, with the introduction above, should explain the idea behind the definitions and the following properties, which may be verified without trouble in the order given.

(2. 21) $0\leqq C\leqq 1$.

(2. 22) $C(P,Q)=1-P-Q+PQ+QP$.

(2. 23) $C(P,Q)=C(\tilde{P},\tilde{Q})=C(Q,P)=C(\tilde{Q},\tilde{P})$.

(2. 24) $C(P,Q)\leftrightarrow P,Q$.

(2. 25) $C(P, Q)\,P = PQP.$

(2. 31) $S + C = 1.$

(2. 32) $S(P, \tilde{Q}) = C(P, Q).$

(2. 4) $S(P, Q) = (P - Q)^2 = (\tilde{P} - \tilde{Q})^2.$

(2. 5) $\mathfrak{N}(C(P, Q)) = \mathfrak{N}(P - \tilde{Q}) = \mathfrak{N}(\tilde{P} - Q) = (\mathfrak{P} \cap \tilde{\mathfrak{Q}}) \cup (\tilde{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{Q}).$

One may permute S and C by (2. 31), (2. 32), and one may permute $P, Q, \tilde{P}, \tilde{Q}$ in various ways by (2. 23). The many resulting corollaries to the formulas above are taken for granted.

3. Unitary applications of one subspace onto another. The opening remark is again trivial:

(3. 11) $$(PQ + \tilde{P}\tilde{Q})(QP + \tilde{Q}\tilde{P}) = (QP + \tilde{Q}\tilde{P})(PQ + \tilde{P}\tilde{Q}) = C(P, Q).$$

Therefore if by definition

(3. 12) $$U = U(P, Q) = C^{-1/2}(QP + \tilde{Q}\tilde{P})$$

then U looks formally like a unitary operator, because $U(P, Q)^* = U(Q, P)$, so (3. 11) gives (by (2. 24)) $U^*U = UU^* = 1$. Also $\tilde{Q}UP = 0$ so $U\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Q}$; $\tilde{P}U^*Q = 0$, so $U^*\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$; thus $U\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$, and similarly $U\tilde{\mathfrak{P}} = \tilde{\mathfrak{Q}}$. It seems U is unitary taking $\mathfrak{P}$ onto $\mathfrak{Q}$ and $\tilde{\mathfrak{P}}$ onto $\tilde{\mathfrak{Q}}$.

Now pause to find when this is valid. Surely not in general, for $\dim \mathfrak{P} = \dim \mathfrak{Q}$ is necessary for the existence of an isometry of $\mathfrak{P}$ onto $\mathfrak{Q}$; and even this is far from sufficient in infinite-dimensional $\mathfrak{H}$, see below. The formal proof above does not require C^{-1} to be bounded, but does require it to be densely defined, that is, $\mathfrak{N}(C) = 0$. (Sufficient but not necessary is for C to have a positive lower bound, or equivalently (see (2. 31), (2.4)), $\|P - Q\| < 1$). Can something be done even when $\mathfrak{N}(C) \neq 0$? Clearly yes. Still (3. 12) gives a unitary U on $\tilde{\mathfrak{N}}(C)$. If

(3. 2) $$\dim(\mathfrak{P} \cap \tilde{\mathfrak{Q}}) = \dim(\tilde{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{Q}),$$

then define U on $\mathfrak{P} \cap \tilde{\mathfrak{Q}}$ as some isometry V onto $\tilde{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{Q}$; define U on $\tilde{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{Q}$ as $-V^*$.[3]) Extend the domain of U to all $\mathfrak{H}$ by linearity.

Define subspaces $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ to be *equivalently positioned* provided (3. 2) holds. What has been proved is the following strengthening of a theorem of Sz.-Nagy [12, § 105].[4])

[3]) The U constructed here is a little special, for later convenience. Namely, on $\mathfrak{N}(C)$, $U^2 = -1$. The reader may verify that this special property is consistent with — indeed is implied by — the paragraph following Theorem 4. 3.

[4]) It may be easily verified that the operator he uses agrees, on $\mathfrak{P}$, with (3.12).

Theorem 3.1. *If $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ are equivalently positioned, there is a unitary W on $\mathfrak{H}$ taking $\mathfrak{P}$ onto $\mathfrak{Q}$ and $\tilde{\mathfrak{P}}$ onto $\tilde{\mathfrak{Q}}$.*

That is, (3.2) implies $\dim \mathfrak{P} = \dim \mathfrak{Q}$ and $\dim \tilde{\mathfrak{P}} = \dim \tilde{\mathfrak{Q}}$. But all three of these equations are equivalent in finite-dimensional $\mathfrak{H}$; the construction of U may appear to have yielded meager results. The following theorem, and especially § 7, defend its introduction more convincingly.

Theorem 3.2. *$\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ are equivalently positioned if and only if there exists a unitary operator W on $\mathfrak{H}$ taking $\mathfrak{P}$ onto $\mathfrak{Q}$ and $\tilde{\mathfrak{P}}$ onto $\tilde{\mathfrak{Q}}$, such that $W \leftrightarrow C(P, Q)$.*

Proof. If $W \leftrightarrow C$, $W\mathfrak{N}(C) = \mathfrak{N}(C)$. By (2.5), $W(\mathfrak{P} \cap \tilde{\mathfrak{Q}}) \subseteq \mathfrak{N}(C) \cap W\mathfrak{P} = \mathfrak{N}(C) \cap \mathfrak{Q} = \tilde{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{Q}$. Similar treatment of W^* completes the proof of (3.2). The converse, almost proved above, calls for one more thing: the proof that U defined above commutes with C. It takes $\mathfrak{N}(C)$ onto $\mathfrak{N}(C)$, so only (3.12) demands attention. By (2.25), $QPC = QPQP = CQP$, and similarly $\tilde{Q}\tilde{P} \leftrightarrow C$, therefore $U \leftrightarrow C$.

The conditions of the theorem do not force $W = U$, even on $\tilde{\mathfrak{N}}(C)$. They are satisfied by a wider class of W, which this paper could treat but will not.

The relation "equivalently positioned" between subspaces $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ is superfluous in the finite-dimensional case, as already mentioned, because equivalent to $\dim \mathfrak{P} = \dim \mathfrak{Q}$. In the infinite-dimensional case it has a different drawback: it is not transitive.[5] Here is a simple example where $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{R}$ are equivalently positioned, likewise $\mathfrak{Q}$ and $\mathfrak{R}$, but $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ are not. Let $\mathfrak{H}$ be generated by the countable orthogonal set $\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots\}$; in symbols, $\mathfrak{H} = [\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots]$. Let $\mathfrak{P} = [x_1, x_2, \ldots]$, $\mathfrak{Q} = [x_0, x_1, x_2, \ldots]$, $\mathfrak{R} = [\ldots, x_{-2}, x_{-1}]$. Then $\mathfrak{P} \cap \tilde{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q} \cap \tilde{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathfrak{Q}} \cap \mathfrak{R}$ are all denumerable-dimensional; but $\dim (\mathfrak{P} \cap \tilde{\mathfrak{Q}}) = 0 \neq 1 = \dim (\tilde{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{Q})$.

(This has exhibited also a pair of subspaces, $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$, which are not equivalently positioned in spite of the existence of a unitary W as described by Theorem 3.1 — namely, the "bilateral shift" $Wx_i = x_{i-1}$.)

However, in case $\dim \mathfrak{P}$ and $\dim \mathfrak{Q}$ are equal *and finite*, $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ *are* necessarily equivalently positioned, of course, and the relation is transitive in this special case. Indeed this case does not differ in any important way from the still more special case where $\dim \mathfrak{H}$ is finite.

[5]) The reader is reminded that the relation between $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ of satisfying $\dim (\mathfrak{P} \cap \tilde{\mathfrak{Q}}) = \dim (\tilde{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{Q}) = 0$ is not transitive even in 2-space.

4. The angle bisector. Before finding the unitary invariants, generalize some more trigonometry, for later use. Assuming for the moment $\mathfrak{N}(C)=0$, define

$$X=X(P,Q)=C^{-1/2}(P-\tilde{Q})=C^{-1/2}(P+Q-1). \tag{4.1}$$

$X=X^*$ is obvious, by (2.24). $X^2=1$ follows most easily from (2.4) with (2.32). One calculates at once that $\tilde{Q}XP=0=\tilde{P}XQ$. Summing up, X is a symmetry on $\mathfrak{H}$ which exchanges $\mathfrak{P}$ with $\mathfrak{Q}$ (hence also $\tilde{\mathfrak{P}}$ with $\tilde{\mathfrak{Q}}$).

Accordingly,

$$Y=Y(P,Q)=\frac{1}{2}(1+X) \tag{4.2}$$

is the projection onto a subspace which may be named the *angle bisector* of $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$. Even in 2-space, angle bisectors are not unique, but $\mathfrak{Y}$ here is essentially "the angle bisector of the acute angle", as appears from Theorem 4.1 below.

If now $\mathfrak{N}(C)\neq 0$, but $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ equivalently positioned, then define X on $\mathfrak{N}(C)$ as an arbitrary symmetry exchanging $\mathfrak{P}\cap\tilde{\mathfrak{Q}}$ with $\tilde{\mathfrak{P}}\cap\mathfrak{Q}$ (cf. §. 3). Keep (4.2). If $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ not equivalently positioned, X is not defined on all of $\mathfrak{H}$.

L e m m a 4.1. *If $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ are equivalently positioned, PQP and QPQ have the same spectrum.* (Cf. Lemma 5.2.)

P r o o f. $QPQ=XPQPX$.

T h e o r e m 4.1. *Let $\mathfrak{N}(C(P,Q))=0$. Then $X(P,Q)$ is the unique symmetry V which exchanges $\mathfrak{P}$ with $\mathfrak{Q}$ (hence also $\tilde{\mathfrak{P}}$ with $\tilde{\mathfrak{Q}}$) and satisfies $PVP\geqq 0$.*

P r o o f. One computes $PXP=C^{-1/2}(PQP)=(PQP)^{1/2}\geqq 0$.

For the converse, let Z be the projection $\frac{1}{2}(V+1)$. Decomposing $\mathfrak{H}$ as $\mathfrak{Z}\oplus\tilde{\mathfrak{Z}}$ gives matrix expressions[6])

$$V=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad P=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix},\qquad Q=\begin{pmatrix}P_{11} & -P_{12}\\ -P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

The matrix for P is general, while that for Q is derived from $Q=VPV$. We know more about the P_{ij}: by the idempotence of P, $P_{12}P_{21}=P_{11}-P_{11}^2$ and $P_{21}P_{12}=P_{22}-P_{22}^2$. Substituting these into the matrix for $C(P,Q)$ com-

[6]) The assigning of a canonical isomorphism between $\mathfrak{Z}$ and $\tilde{\mathfrak{Z}}$ is avoidable in this proof; so, for example, P_{12} may be regarded merely as an operator from one Hilbert space $\tilde{\mathfrak{Z}}$, onto another, $\mathfrak{Z}$. See Theorem 6.2.

puted from (2.22), one gets

$$(4.32)\qquad \begin{pmatrix} 1-4P_{11}+4P_{11}^2 & 0 \\ 0 & 1-4P_{22}+4P_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

What is to be proved is that $V=X(P, Q)$, or, by (4.1), that $C^{1/2}$ is equal to

$$(4.33)\qquad V(P+Q-1)=\begin{pmatrix} 2P_{11}-1 & 0 \\ 0 & 1-2P_{22} \end{pmatrix}.$$

For this the last hypothesis of the theorem will be essential, for there are many symmetries exchanging $\mathfrak{P}$ with $\mathfrak{Q}$ [3], and the proof so far applies to any of them.

On the subspace $\mathfrak{N}(C(P, Z))$, which is $\mathfrak{N}(P-\tilde{Z})$ by (2.4) with (2.32), we have $V=\tilde{P}-P$, $PVP=-P\geqq 0$. Therefore $\mathfrak{N}(C(P, Z))=0$, and Lemma 4.1 applies to $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Z}$. Now the hypothesis $PVP\geqq 0$ implies $PZP\geqq \frac{1}{2}P$, which implies by Lemma 4.1 $ZPZ\geqq\frac{1}{2}Z$, or $P_{11}\geqq\frac{1}{2}$. Similarly $P_{22}\leqq\frac{1}{2}$. Hence (4.33) is the positive square root of (4.32), as predicted.

The next theorems show that the particular "rotations" singled out in the last section are related to the particular angle bisectors singled out in this section in a way which generalizes the 2-space facts. First come lemmas leading to the half-angle formula. Some of the results are ambiguous in general; so for now, assume $\mathfrak{N}(C(P, Q))=0$.

Lemma 4.2. $YP+\tilde{Y}\tilde{P}=\frac{1}{2}(1+U)$.

Proof. Using definitions (4.2) then (4.1),

$$2YP+2\tilde{Y}\tilde{P}-1=XP-\tilde{X}\tilde{P}=C^{-1/2}(QP+\tilde{Q}\tilde{P})=U.$$

Lemma 4.3. $U+U^*=2C^{1/2}$.

Proof. Define for the moment

$$F=C^{1/2}(U+U^*)=QP+\tilde{Q}\tilde{P}+PQ+\tilde{P}\tilde{Q}.$$

To prove $F=2C$, $PFP=2PQP=2PCP$, $PF\tilde{P}=P(Q+\tilde{Q})\tilde{P}=0=$ $=2PC\tilde{P}$, and similarly for $\tilde{P}FP$ and $\tilde{P}F\tilde{P}$.

Lemma 4.4. $C(P, Y)=\frac{1}{2}(1+C(P, Q)^{1/2})=C(Y, Q)$.

Proof. Use (3.11) applied to P, Y; then Lemma 4.2, then Lemma 4.3:

$$C(P, Y)=(PY+\tilde{P}\tilde{Y})(YP+\tilde{Y}\tilde{P})=\frac{1}{4}(2+U+U^*)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}C(P, Q)^{1/2}.$$

Symmetrically for $C(Y, Q)$.

Theorem 4.2. $U(P, Y) = U(Y, Q)$.

Proof. Expressing both sides by (3.12), and using $C(P, Y) = C(Y, Q)$ (Lemma 4.4), the problem is reduced to proving $YP + \tilde{Y}\tilde{P} = QY + \tilde{Q}\tilde{Y}$. But by Lemma 4.2 applied twice,

$$YP + \tilde{Y}\tilde{P} = \frac{1}{2}(1 + U(P, Q)) = \frac{1}{2}(1 + U(Q, P)^*) = (YQ + \tilde{Y}\tilde{Q})^*.$$

Theorem 4.3. $U(P, Y)^2 = U(P, Q)$.

Proof. First,

$$U(P, Y)^2 = U(Y, Q)\, U(P, Y) = C(P, Y)^{-1}(QY + \tilde{Q}\tilde{Y})(YP + \tilde{Y}\tilde{P}) = \\ = C(P, Y)^{-1}(QYP + \tilde{Q}\tilde{Y}\tilde{P}).$$

Now $Y = \frac{1}{2}(1 + C(P, Q)^{-1/2}(1 - \tilde{P} - Q))$ by (4.2), (4.1), so $QYP = \frac{1}{2}(1 + C(P, Q)^{-1/2})\, QP = C(P, Q)^{-1}\, C(P, Y)\, QP$. Similarly, from $\tilde{Y} = \frac{1}{2}(1 - C(P, Q)^{-1/2}(-1 + P + Q))$ follows $\tilde{Q}\tilde{Y}\tilde{P} = C(P, Q)^{-1}\, C(P, Y)\, \tilde{Q}\tilde{P}$. Substituting these in the above expression for $U(P, Y)^2$ makes it exactly the expression (3.12) for $U(P, Q)$.

It should be observed that if $\mathfrak{N}(C(P, Q)) \neq 0$ but $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ equivalently positioned, the last results remain true, provided the (hitherto not unique) definition of $U(P, Q)$ on $\mathfrak{N}(C)$ is made to accord with the definition of $X(P, Q)$ there by *assuming* the conclusion of Theorem 4.3 there.

Theorem 4.4. $X(P, Q)(P - \tilde{P}) = U(P, Q)$.

Proof. By definitions, each side is equal to

$$C(P, Q)^{-1/2}\{(-\tilde{P} + Q)P - (P - \tilde{Q})\tilde{P}\}.$$

Another (equally obvious) version of the theorem: $X(P, Q)P = U(P, Q)P$.

The theorem shows that any $U(P, Q)$ is the product of two symmetries. The following theorem implies as much of a converse as is true: the product of the symmetries leaving fixed subspaces $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ respectively is a U if and only if $S(P, Q) \leqq \frac{1}{2}$. See also Theorem 6.3.

Theorem 4.5. *$S(P, Q) \leqq \frac{1}{2}$ is necessary and sufficient for the existence of $\mathfrak{R}$ such that $P = Y(R, Q)$.*

That is, $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ may not be "too far apart", cf. [2]; in particular, $\mathfrak{N}(C(P, Q)) = 0$.

Proof. Necessity is essentially the first sentence in the proof of Theorem 4. 1. Sufficiency will be proved from the hard half of Theorem 4. 1 (its uniqueness assertion).

Define $R = (P - \tilde{P})\, Q(P - \tilde{P})$. To show that $P = Y(R, Q)$, that is, that $P - \tilde{P} = X(R, Q)$, requires no argument on $\mathfrak{N}(C(R, Q))$, because there $X(R, Q)$ is simply *any* symmetry exchanging $\mathfrak{P}$ with $\mathfrak{Q}$, and $P - \tilde{P}$ will do. On $\tilde{\mathfrak{N}}(C(R, Q))$, it must be shown in addition that $Q(P - \tilde{P})Q \geqq 0$; but this follows immediately from $S(P, Q) \leqq \frac{1}{2}$.

(The definition $R = U(P, Q)^* P U(P, Q)$ would, by Theorems 4.2 and 4. 4, have been equivalent.)

5. Unitary invariants for a pair of subspaces. The purpose in this section is to give a complete set of unitary invariants for $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ in terms of the spectral multiplicity function of the bounded self-adjoint $C(P, Q)$. (I assume familiarity with spectral multiplicity theory [7, III].) In the 4-dimensional case described in the introduction, C has two 2-dimensional eigenspaces with corresponding eigenvalues $\cos^2\theta_i$; so this section generalizes what was said there.

What is required is to assign a set of objects to any pair of subspaces $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$; to show $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ can be carried onto $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'$ by an isometry of $\mathfrak{H}$ if and only if the same set of objects was assigned to $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'$ as to $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$; and to say exactly what sets of objects can arise.

Lemma 5. 1. *The following are unitary invariants for* $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$:

$$\dim (\mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q}),\ \dim (\tilde{\mathfrak{P}} \cap \tilde{\mathfrak{Q}}),\ \dim (\mathfrak{P} \cap \tilde{\mathfrak{Q}}),\ \dim (\tilde{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{Q}).$$

This is obvious. Only $(\mathfrak{N}(C) \cup \mathfrak{N}(S))^{\sim}$ requires study.

Lemma 5. 2. *If* $\mathfrak{N}(C) = \mathfrak{N}(S) = 0$, *then* $PQP = PCP$ *and* $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{P} = \tilde{P}C\tilde{P}$ *have the same spectrum.*

Proof. In this case $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ are equivalently positioned and so are $\mathfrak{Q}$ and $\tilde{\mathfrak{P}}$. A unitary operator commuting with C and exchanging $\mathfrak{P}$ with $\tilde{\mathfrak{P}}$ is $U(Q, \tilde{P})U(P, Q)$.

Lemma 5. 3. *If* $\mathfrak{N}(C) = \mathfrak{N}(S) = 0$, *the spectrum of* C *is of even multiplicity, and is on* $[0, 1]$ *with zero multiplicity at the endpoints, but is otherwise arbitrary.*

Proof. To prove the spectrum of C is of even multiplicity (that is, the values of its spectral multiplicity function are even integers or infinite), I will specify two orthogonal projections commuting with C such that the restrictions of C to their subspaces are isomorphic; it is not hard to see that this is equivalent.

Namely, the projections are P and $\tilde{P}$. The isomorphism results from Lemma 5. 2.

The other statements about the spectrum of C are obvious.

Conversely, suppose given an operator (call it A) with such a spectrum. $\mathfrak{N}(A)=\mathfrak{N}(1-A)=0$ by assumption. It must be shown that $A=C(P,Q)$ for suitable P, Q. Now (to rephrase the first paragraph of the proof) the even multiplicity of the spectrum of A is equivalent to the possibility of representing A in the matrix form $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ (with respect to some expression of $\mathfrak{H}$ in the form $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ and some canonical isomorphism $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ of $\mathfrak{H}_1$ onto $\mathfrak{H}_2$). Here $0 \leqq B \leqq 1$, $\mathfrak{N}(B)=\mathfrak{N}(1-B)=0$.

Use the construction of MICHAEL [15, § 2]: Define

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} B & (B-B^2)^{1/2} \\ (B-B^2)^{1/2} & 1-B \end{pmatrix}. \tag{5. 1}$$

That P is a projection is obvious; also $Q=Q^*$, and one calculates $Q^2=Q$. Evaluating $C(P,Q)$ according to the definition (2. 11), one obtains A.

For the theorem, nothing substantial is lacking but the main assertion: If $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ have the same associated invariants as do $\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}'$, then there is unitary equivalence. The only non-trivial part of that is the following

Lemma 5. 4. *Let $\mathfrak{N}(C)=\mathfrak{N}(S)=0$, and let $C(P',Q')$ be unitary equivalent to $C(P,Q)$. Then there is some unitary V on $\mathfrak{H}$ taking $\mathfrak{P}$ onto $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}$ onto $\mathfrak{Q}'$.*

Proof. It is enough to show (i) that P and Q may be represented in the form (5. 1), by suitably choosing the complementary subspaces $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$ and the canonical isomorphism, and (ii) that the isomorphism type of B in (5. 1) depends only on the isomorphism type of $C(P,Q)$. Because then P' and Q' will have isomorphic matrix expressions (5. 1), and the construction of V will be obvious.

Let $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{H}_2=\tilde{\mathfrak{P}}$. The canonical isomorphism $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ is $U(Q,\tilde{P})\,U(P,Q)\,P$. It has already been proved (Lemma 5. 2) that then $C(P,Q)=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, with the spectrum of B determined by that of C; and the matrix form of P is as required. By (2. 25),

$$Q=\begin{pmatrix} B & D \\ D^* & 1-B \end{pmatrix}$$

for some D. Because $Q^2=Q$, $DD^*=B-B^2$. But is $D\geqq 0$? Or equivalently, is the operator $(PQ\tilde{P})\,U(Q,\tilde{P})\,U(P,Q)=(CS)^{-1/2}\,PQ\tilde{P}QP$ positive? Clearly yes.

The results may be summed up as follows.

Theorem 5. 1. *The following is a complete set of unitary invariants for* $\mathfrak{P},\mathfrak{Q}$: (i) *four cardinal numbers, the dimensionalities of* $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{Q}$, $\tilde{\mathfrak{P}}\cap\tilde{\mathfrak{Q}}$, $\mathfrak{P}\cap\tilde{\mathfrak{Q}}$, $\tilde{\mathfrak{P}}\cap\mathfrak{Q}$; *any 4-tuple of cardinals may occur;* (ii) *a spectral multiplicity function on measures on* $[0,1]$, *that of* $C(P,Q)$ *restricted to* $(\mathfrak{N}(C)\cup\mathfrak{N}(S))^{\sim}$; *it has even values, and is zero on the point measures at* 0 *and* 1, *but is otherwise arbitrary.*

Remark. The essential point in the proof is the fact that an operator B on a Hilbert space $\mathfrak{H}_1$ which satisfies $0\leqq B\leqq 1$ is of the form PQP, where P and Q are projections (in some constructed Hilbert space $\mathfrak{H}\supseteq\mathfrak{H}_1$). A much more general theorem was proved in 1940 by NAIMARK; namely, B is replaced by an increasing family of positive operators and Q by a resolution of the identity [15, § 2]. I used MICHAEL's construction here because it is the same sort of generalized trigonometry that is used throughout the present paper. Actually, it can be extended, though less easily, to prove NAĬMARK's theorem.

6. Other characterization theorems. Another complete set of unitary invariants for $\mathfrak{P},\mathfrak{Q}$ can be got from the spectrum of $P-Q$ instead of $C(P,Q)$ [3, §§ V, VI]. To avoid repetition, I will give a slightly different statement of the idea.

Theorem 6. 1. *The following are necessary and sufficient conditions on an operator* A *in order that it be the difference of two projections:* $-1\leqq A\leqq 1$; *and on* $\tilde{\mathfrak{N}}(1-A^2)$ *there exists a unitary* W *such that* $AW=-WA$.

Proof. If $A=P-Q$, so that $1-A^2=C(P,Q)$, take $W=X(P,Q)$ as in § 4; for, when restricted to $\tilde{\mathfrak{N}}(C)$, $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ are equivalently positioned. The conditions are evidently satisfied.

Conversely, let A, W satisfy the conditions. Since it is clear what to do about $\mathfrak{N}(A)$ and $\mathfrak{N}(1-A^2)$, let us for simplicity hereafter take them to be zero. That is, $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_+\oplus\mathfrak{H}_-$, where $\mathfrak{H}_+$ is the closure of the range of A^+, and $\mathfrak{H}_-$ that of A^-. Setting $V=W$ on $\mathfrak{H}_+$ and $V=W^*$ on $\mathfrak{H}_-$ determines V as an operator on $\mathfrak{H}$, which one may verify to be a symmetry satisfying $AV=-VA$. Notice that $V\leftrightarrow 1-A^2$.

Define operators

$$P=\frac{1}{2}(1+A+V(1-A^2)^{1/2}),\qquad Q=\frac{1}{2}(1-A+V(1-A^2)^{1/2}).$$

They are hermitian (since V is $-W$ would not do here). Their difference is A. The theorem is proved if they are shown to be idempotent. This is a simple matter of multiplying out, remembering the properties of V and A.

By the way, $V = X(P, Q)$ here (as one checks most easily by noting again that $A = P - Q$ implies $1 - A^2 = C$).

Theorem 6.2. *Let $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ be equivalently positioned, and $\mathfrak{Q}, \tilde{\mathfrak{P}}$ also equivalently positioned. Then with some F there exist matrix representations*

$$P = \begin{pmatrix} F & -(F\tilde{F})^{1/2} \\ -(F\tilde{F})^{1/2} & \tilde{F} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} F & (F\tilde{F})^{1/2} \\ (F\tilde{F})^{1/2} & \tilde{F} \end{pmatrix}.$$

The condition $\frac{1}{2} \leqq F \leqq 1$ may be imposed; F is otherwise arbitrary; the spectral multiplicity function of F is then a complete set of unitary invariants for $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$.

This is readily proved (independently of Theorems 5.1 and 6.1) by pursuing the study of the matrix representation (4.31), using $\mathfrak{Y}(P, Q)$ for $\mathfrak{Z}$ and $U(Q, \tilde{P})\, U(P, Q)$ for $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Details may be omitted. In this representation the other associated operators take simple forms too, for instance

$$U(P, Y) = \begin{pmatrix} F^{1/2} & -F^{1/2} \\ F^{1/2} & F^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Slight modifications can avoid the special hypothesis about $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$, giving still another substitute set of invariants instead of Theorem 5.1.

The first part of the next theorem may be compared to known results [3], [11].

Theorem 6.3. *Unitary W is the product of some pair of symmetries if and only if* (i) *its spectrum is symmetric (multiplicity counted) with respect to the real axis. $W = U(P, Q)$ for some $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ if and only if its spectrum, beside having the above property* (i), *lies in the (closed) right half plane.*

Proof. In any case the spectrum of W^* is the image of that of W with respect to the real axis; so (i) is equivalent to saying W^* unitary equivalent to W. By much the same familiar argument as above, we may put $ZWZ = W^*$, Z a symmetry, without loss of generality. (Namely — if $Z'^* W Z' = W^*$, Z' unitary, then Z' exchanges $(i(W - W^*))^+ \mathfrak{H}$ with $(i(W - W^*))^- \mathfrak{H}$; set $Z = Z'^*$ on the first space, $Z = Z'$ on the second, and $Z = 1$ on $\mathfrak{N}(W - W^*)$.) But for unitary W and symmetry Z, the following are evidently equivalent:[7] $ZWZ = W^*$; $(ZW)^2 = 1$; $ZW = Z_1$ is a symmetry; $W = ZZ_1$ with Z and Z_1 both symmetries.

[7]) This computation has occurred in proving different results [9, Corollaries 3, 4].

The spectrum of W lies in the right half plane if and only if $W+W^* \geqq 0$. $U(P, Q)$ has this property (Lemma 4.3). Conversely, let a product of two symmetries, $W=(Q-\tilde{Q})(P-\tilde{P})$, have the property $0 \leqq P(W+W^*)P = 2P(Q-\tilde{Q})P$, that is $P\tilde{Q}P \leqq \frac{1}{2}P$, and similarly $\tilde{P}Q\tilde{P} \leqq \frac{1}{2}\tilde{P}$; adding, $S(P,Q) \leqq \frac{1}{2}$. By Theorems 4.5 and 4.4, there exists $\mathfrak{R}$ for which $W=U(R, Q)$.

7. Extremal properties of U. Not only does $U(P, Q)$ of §3 carry $\mathfrak{P}$ onto $\mathfrak{Q}$ and $\tilde{\mathfrak{P}}$ onto $\tilde{\mathfrak{Q}}$, if $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ are equivalently positioned, it does so "as economically as possible." The theorems of this section make this vague assertion precise. Throughout, W will mean any unitary operator such that $W\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}$, $W\tilde{\mathfrak{P}}=\tilde{\mathfrak{Q}}$. Then the vague assertion might mean

$$\|1-U\| \leqq \|1-W\|. \tag{7.1}$$

Such theorems are of interest both because they emphasize the suitability of U for applications to perturbation theory [12, § 136], and because of their relevance to metrics [2].

The norm involved in the first theorem is the usual Hilbert norm or bound:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|:\ \|x\|=1\};\ \text{for } A \geqq 0,\ \|A\| = \sup\{(Ax, x):\ \|x\|=1\}.$$

Theorem 7.1 $\|1-U\| \leqq \|1-W\|$.

Proof. It is enough to discuss $\|(1-W^*)(1-W)\|$, because it is equal to $\|1-W^*\|\cdot\|1-W\| = \|1-W\|^2$. Now

$$\begin{aligned} \|(1-W^*)(1-W)\| &\geqq \|P(1-W^*)(1-W)P\| = \|(1-W)P\|^2 \\ &= \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\mathfrak{P}}} \|x-Wx\|^2 \geqq \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\mathfrak{P}}} \inf_{\substack{\|y\|=1\\ y\in\mathfrak{Q}}} \|x-y\|^2. \end{aligned} \tag{7.2}$$

For each x, a minimizing unit vector y in the last expression is $Qx/\|Qx\|$[8]; I give the well-known proof. Suppose a unit vector $y_0 \in \mathfrak{Q}$ such that

$$\|x-y_0\|^2 < \left\| x - \frac{Qx}{\|Qx\|} \right\|^2.$$

Expanding gives $\operatorname{Re}(x, y_0) > (Qx, x)/\|Qx\| = \|Qx\|$. But the $y \in \mathfrak{Q}$ which minimizes $\|x-y\|^2$ without restriction on $\|y\|$ is of course $y=Qx$; in particular,

$$\|x - \|Qx\|y_0\|^2 \geqq \|x-Qx\|^2.$$

Expanding *this* gives $\operatorname{Re}(x, y_0) \leqq \|Qx\|$, a contradiction.

[8]) Unless $x \in \tilde{\mathfrak{Q}}$. But if such x exists the right-hand member of (7.2) is 2, and the rest of the proof is simplified. The uniqueness of the minimizing y is of no concern here.

In this derivation I mentioned that $\|Qx\|^2 = (Qx, x)$, since Q is a projection. I mention further that since $x \in \mathfrak{P}$,

$$\|Qx\|^2 = (Qx, x) = (PQPx, x) = (Cx, x) = \|C^{1/2}x\|^2.$$

The right-hand member of (7. 2) can now be rewritten as (x restricted as before)

$$\sup \left\| x - \frac{Qx}{\|Qx\|} \right\|^2 = \sup \,(2 - 2\|Qx\|) = \sup\,(2 - 2\|C^{1/2}x\|) =$$
$$= \sup\,(2 - 2\,(C^{1/2}x, x)) = \|P(2 - 2\,C^{1/2})\,P\| = \|2 - 2\,C^{1/2}\| = \|(1 - U^*)(1 - U)\|.$$

(The last equality is by Lemma 4. 3. The one before it is by Lemma 5. 2 (and $C \longleftrightarrow P$).) What has been proved is

$$\|1 - W\|^2 = \|(1 - W^*)(1 - W)\| \geqq \|(1 - U^*)(1 - U)\| = \|1 - U\|^2,$$

that is, the theorem.

Beside this norm,

$$\|A\| = \|A\|_H = \sup\{\|Ax\| \;:\; \|x\| = 1\}, \tag{7. 31}$$

certain other norms will be considered, such as the Frobenius norm

$$\|A\|_2 = (\operatorname{tr} A^* A)^{1/2}. \tag{7. 32}$$

In the infinite-dimensional case the other norms do not in general exist; but (7. 1) would still make sense if one or both sides was infinite. Also questions concerning eigenvalues may be handled in some cases. For completely continuous hermitian $B \geqq 0$, denote the eigenvalues, multiplicity counted, by $\lambda_k(B)$, ordered as $\lambda_1(B) \geqq \lambda_2(B) \geqq \ldots$. In particular, when dim $\mathfrak{H} = n$ is finite, let Φ be any symmetric gauge function of n variables, and consider the norm

$$\|A\|_\Phi = \Phi\big(\lambda_1(|A|), \ldots, \lambda_n(|A|)\big), \tag{7. 33}$$

where $|A| = (A^*A)^{1/2} \geqq 0$. This norm is unitary invariant: for any unitary V, $\|VA\|_\Phi = \|A\|_\Phi = \|AV\|_\Phi$. It is known [16], [13, pp. 84—88] that every unitary invariant norm is of this form.[9]) Included in (7. 33) are the norms

$$\|A\|_p = \big(\lambda_1(|A|)^p + \cdots + \lambda_n(|A|)^p\big)^{1/p}, \qquad p \geqq 1. \tag{7. 34}$$

(7. 32) is the special case $p = 2$ and (7. 31) is the limiting case $p \to \infty$.

The eigenvalues are given, for hermitian $B \geqq 0$, by

$$\lambda_k(B) = \inf_{\mathfrak{N}_{k-1}} \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \perp \mathfrak{N}_{k-1}}} (Bx, x). \tag{7. 4}$$

Here $\mathfrak{N}_{k-1}$ denotes an arbitrary $k-1$-dimensional subspace [12, p. 235]. (7. 4)

[9]) Normalize, as usual, by requiring one-dimensional projections to have norm 1.

may, and will, be used as the definition of λ_k even if B is not completely continuous, thus λ_k need not then be an eigenvalue. (All λ_k from some k on will be equal the max of the continuous spectrum.)

Before discussing alternate interpretations of (7. 1), I give a very strong extremal property of U.

Theorem 7.2. $\lambda_k\big(P(1-U^*)(1-U)P\big) \leqq \lambda_k\big(P(1-W^*)(1-W)P\big)$.

Proof. Use the expression (7. 4), observing that the minimax certainly can be confined to $\mathfrak{P}$. Analogously to (7. 2),

$$\lambda_k\big(P(1-W^*)(1-W)P\big) \geqq \inf_{\mathfrak{N}_{k-1}\subseteq\mathfrak{P}} \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in\tilde{\mathfrak{N}}_{k-1}\cap\mathfrak{P}}} \inf_{\substack{\|y\|=1\\ y\in\mathfrak{Q}}} \|x-y\|^2.$$

Reasoning parallel to that which proved the preceding theorem now proves the right-hand member equal to

$$\lambda_k(P(2-2C^{1/2})P) = \lambda_{2k}(2-2C^{1/2}) = \lambda_{2k}\big((1-U^*)(1-U)\big) = \\ = \lambda_k\big(P(1-U^*)(1-U)P\big).$$

This proves the theorem.

Theorem 7.3. $\|1-U\|_2 \leqq \|1-W\|_2$.

Proof. In case of pure point spectrum, and in case the indicated sums converge,

$$\|1-W\|_2^2 = \operatorname{tr}\big((1-W^*)(1-W)\big) = \\ = \operatorname{tr}\big(P(1-W^*)(1-W)P\big) + \operatorname{tr}\big(\tilde{P}(1-W^*)(1-W)\tilde{P}\big),$$

and the W which minimizes this is U, by Theorem 7. 2. In case $\|1-U\|_2$ is infinite, the same reasoning shows that $\|1-W\|_2$ is also. The possibility remains that $\|1-W\|_2$ may be infinite but not $\|1-U\|_2$; this too is satisfactory.

Theorem 7.4. *In the finite-dimensional case,* $\|1-U\|_p \leqq \|1-W\|_p$ *for* $p \geqq 2$.

Proof. $\|1-W\|_p^p = \|(1-W^*)(1-W)\|_{p/2}^{p/2}$, so it is more than enough to show that

$$\|(1-U^*)(1-U)\| \leqq \|(1-W^*)(1-W)\|$$

for every unitary invariant norm. For this, it is known [5, Thm. 4] to be sufficient to prove that $S_k((1-U^*)(1-U)) \leqq S_k((1-W^*)(1-W))$ for $k=1, \ldots, n$; where by definition $S_k = \Sigma_{j=1}^k \lambda_j$.

This general fact will be used [6, Thm. 3], [10, § 2]: for hermitian B,

$$S_k(B) \geqq S_k(PBP + \tilde{P}B\tilde{P}).$$

Though the following proof is written for even $k=2m$, the restriction is not essential.

$$S_{2m}((1-W^*)(1-W)) \geqq$$
$$\geqq \max_{l \leqq 2m} \{S_l(P(1-W^*)(1-W)P)+S_{2m-l}(\tilde{P}(1-W^*)(1-W)\tilde{P})\} \geqq$$
$$\geqq S_m(P(1-W^*)(1-W)P)+S_m(\tilde{P}(1-W^*)(1-W)\tilde{P}).$$

But taking $W=U$ minimizes the right-hand member (Theorem 7. 2) and also makes both inequalities become equalities.

This completes the positive work of § 7, but I add remarks on some natural conjectures.

I see no reason to doubt that Theorem 7. 4 is true for dim $\mathfrak{H}$ infinite.[10]) Then Theorem 7. 2 would become a special case, Theorem 7. 1 a limiting case.

The bound on p in Theorem 7. 4 cannot be improved. In 2-space, let $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ be nearly orthogonal 1-subspaces; $\|1-U\|_p^p$ is nearly $2(2^{p/2})$, and if $p<2$ this can be greater than $\|1-X\|_p^p$.

However, it is a plausible conjecture that if $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ are assumed to be close in the sense that $S(P,Q) \leqq \frac{1}{2}$ then (7. 1) holds for all unitary invariant norms.

Bibliography.

[1] C. Davis, Generators of the ring of bounded operators, *Proceedings American Math. Soc.*, **6** (1955), 970—972.

[2] C. Davis, Separation of two linear subspaces II (*in preparation*).

[3] J. Dixmier, Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert, *Revue Scientifique*, **86** (1948) 387—399.

[4] J. Dixmier, Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications, *Bulletin Soc. Math. France*, **77** (1949), 11—101.

[5] K. Fan, Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators, *Proceedings National Acad. Sci. U. S. A.*, **37** (1951), 760—766.

[6] K. Fan, Inequalities for eigenvalues of Hermitian matrices (in "Contributions to the solution of systems of linear equations and the determination of eigenvalues", Washington, 1954), pp. 131—139.

[7] P. R. Halmos, *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity* (New York, 1951).

[8] P. R. Halmos and S. Kakutani, Products of symmetries, *Bulletin American Math. Soc.*, **64** (1958), 77—78.

[10]) For the norm constructed like $\| \quad \|_p$ using only $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ in (7. 34), with some finite N, the analog of Theorem 7. 4 is true in infinite-dimensional space. Some further generalizations of the same character are possible.

[9] P. R. HALMOS and J. VON NEUMANN, Operator methods in classical mechanics II, *Annals of Math.*, **43** (1942), 332—350.

[10] A. HORN, Doubly stochastic matrices and the diagonal of a rotation matrix, *American Journal of Math.*, **76** (1954), 620—630.

[11] G. JULIA, Sur une propriété caractéristique des produits de deux symétries (in "Studies in mathematics and mechanics presented to Richard von Mises", New York, 1954), pp. 36—39.

[12] F. RIESZ and B. SZ.-NAGY, Leçons d'analyse fonctionnelle (Budapest, 1952, 1953, 1955).

[13] R. SCHATTEN, *A theory of cross-spaces* (Princeton, 1950).

[14] P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, I. Teil, *Die linearen Räume* (Leipzig, 1902).

[15] B. SZ.-NAGY, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* Appendix to [12] (Budapest, 1955).

[16] J. VON NEUMANN, Some matrix-inequalities and metrization of matric-space. *Bulletin de l'Institut de mathématiques et mécanique à l'Université Kouybycheff de Tomsk*, **1** (1935—37), 286—300.

Added in proof: See also

D. SUSCHOWK, Über die gegenseitige Lage zweier linearer Vektorräume, *Bayerische Akad. Wiss. Math.-Nat. Klasse, Sitzungsberichte*, **1956** (1957), 15—22.

(Received March 25, 1958.)

On strongly continuous semigroups of spectral operators in Hilbert space.

By CIPRIAN FOIAŞ in Bucharest.

It was proved by BÉLA SZ.-NAGY [4] that any uniformly bounded one-parameter group of linear operators $\{T_t\}$ on a Hilbert space $\mathfrak{H}$ is similar to a one-parameter group of unitary operators $\{U_t\}$ (i. e. there exists a regular selfadjoint operator A, such that $T_t = A U_t A^{-1}$ for all $-\infty < t < +\infty$). Using especially this fact, we shall prove the following

Theorem 1. *Any strongly continuous one-parameter semigroup $\{T_t\}$ $(t>0)$ of scalar type operators (in* DUNFORD*'s sense* [2]) *on a Hilbert space $\mathfrak{H}$, having their spectral measures $E_t(\sigma)$ uniformly bounded for $t>0$,*[1]) *is similar to a semigroup $\{N_t\}$ of normal operators, i. e. there exists a regular selfadjoint operator A on $\mathfrak{H}$ such that $T_t = A N_t A^{-1}$ for all $t>0$.*

1. We shall first consider a particular case. Let us call a scalar type operator T *circled* if its spectrum $\sigma(T)$ lies on the unit circle $\{\lambda: |\lambda|=1\}$. Then the condition of uniform boundedness with respect to t is unnecessary.

Theorem 2. *Any strongly continuous one-parameter semigroup $\{T_t\}$ $(t>0)$ of circled scalar type operators is similar to a semigroup of unitary operators.*

Proof. Since T_t is circled, T_t^{-1} exists for all $t>0$; if we put $T_0 = I$, and $T_t = T_{-t}^{-1}$ for $t<0$, we obtain a one-parameter group of operators $\{T_t\}$. Since $T_t f = T_{1+t} T_1^{-1} f \to T_1 T_1^{-1} f = f$ for $t \to 0$ and $f \in \mathfrak{H}$, the one-parameter group $\{T_t\}$ is strongly continuous at $t=0$, thus for all real t. Put $\mu = \sup\limits_{0 \leqq t \leqq 1} \|T_t\|$; from the STEINHAUS—BANACH theorem it follows that $\mu < +\infty$. Let $[t]$ be the greatest integer $\leqq t$; by [2], theorem 7, we have

$$\|T_t\| \leqq \|T_{t-[t]}\| \cdot \|T_{[t]}\| \leqq \mu \|T_{[t]}\| = \mu \|T_1^{[t]}\| \leqq \mu \cdot v(E_1) \sup_{\lambda \in \sigma(T_1)} |\lambda|^{[t]} = \\ = \mu \cdot v(E_1) < +\infty,$$

where $v(E_1)$ is a finite constant depending only on the spectral measure $E_1(\sigma)$ of T_1. Thus, the one-parameter group $\{T_t\}$ is uniformly bounded.

---

[1]) I. e. there exists a $K < \infty$ such that $\|E_t(\sigma)\| \leqq K$ for all $t > 0$ and all Borel set σ on the real axis $\Omega = (-\infty, \infty)$.

By B. Sz.-Nagy's theorem mentioned above, there exists a regular self-adjoint operator A such that $A^{-1}T_tA$ is unitary for all t; hence theorem 2 is proved.

2. In the proof of theorem 1 we need also the "polar decomposition" of a scalar type operator T. Let $\sigma(T)$ be its spectrum, and $E(\sigma)$ the spectral measure of T. Put

(1) $r(\lambda)=|\lambda|$, $u(\lambda)=\exp(i\arg\lambda)$ for $\lambda\neq 0$, and $u(0)=1$.

Then if

(2) $$R=\int_{\sigma(T)} r(\lambda)E(d\lambda),\qquad U=\int_{\sigma(T)} u(\lambda)E(d\lambda),$$

we have by lemma 6 and theorem 16 of [2] that: (i) U is a *circled* scalar type operator, and R a *positive* scalar type operator (i. e. with the spectrum on the positive real semi-axis), (ii) U and R commute with T, and

(3) $$T=RU=UR$$

(4) $$UE(\{0\})=E(\{0\})U=E(\{0\}).$$

Lemma. *R and U are uniquely determined by* (i), (ii), (3), *and* (4) *(R being uniquely determined already by the first three conditions).*

Proof. Let $T=U_1R_1$ be another decomposition of T with the properties (i), (ii) and (3). Since U_1 and R_1 commute with T, by theorem 5 of [2] they commute also with U and R. By an obvious extension of a theorem of J. Wermer ([5], theorem 1) from the case of two commuting spectral measures to the case of four, there is a regular selfadjoint operator A such that $R^0=A^{-1}RA$, $R_1^0=A^{-1}R_1A$, $U^0=A^{-1}UA$ and $U_1^0=A^{-1}U_1A$ are all normal; then U^0, U_1^0 are unitary, and R^0, R_1^0 positive selfadjoint operators; hence from

$$(R^0)^2=R^0U^0(U^0)^*R^0=A^{-1}TA(A^{-1}TA)^*=R_1^0U_1^0(U_1^0)^*R_1^0=(R_1^0)^2,$$

it results that $R^0=R_1^0$. Thus $R=R_1$. To prove the uniqueness of U under the additional condition (4), remark that for all $f\in\mathfrak{H}$ we have

$$T(U-U_1)f=UR(U-U_1)f=U(T-T)f=0,$$

so that $E(\{0\})(U-U_1)f=(U-U_1)f$. This relation gives $U[I-E(\{0\})]=$ $=U_1[I-E(\{0\})]$; so that if U_1 satisfies also (4), we obtain $U=U_1$, and the lemma is proved.

3. We can now pass to the proof of theorem 1. Let $\{T_t\}$ $(t>0)$ be a strongly continuous semigroup of scalar type operators. Put

$$R_t=\int_{\sigma(T_t)} r(\lambda)E_t(d\lambda),\qquad U_t=\int_{\sigma(T_t)} u(\lambda)E_t(d\lambda),\qquad V_t=\int_{\sigma(T_t)} \overline{u(\lambda)}\,E_t(d\lambda),$$

where $E_t(\sigma)$ is the spectral measure of T_t. Remark that $V_t = U_t^{-1}$, so that by the theorem 7 of [2] we have $\|U_t\| \leqq 4K$ and $\|U_t^{-1}\| \leqq 4K$. By theorem 5 of [2], R_t and U_t commute with R_s and U_s for all $t, s > 0$. Applying WERMER's theorem 1 [5] to R_t and R_s, resp. to U_t and U_s, and using the fact that the product of two permutable positive selfadjoint operators is positive, and the product of two unitary operators is unitary, one obtains that $R_s R_t$ is a positive and $U_s U_t$ a circled scalar type operator. On the other hand

$$T_{t+s} = T_t T_s = R_t U_t R_s U_s = R_t R_s U_t U_s,$$

and $R_t R_s$, $U_t U_s$ commute with T_{t+s}. Thus, by virtue of lemma 2, we have $R_{t+s} = R_t R_s$, so that R_t is a semigroup of positive scalar type operators. To such a semi-group we can apply the considerations given in [3], p. 73, for the case of a semigroup of positive selfadjoint operators. To this aim, let $G_t(\sigma)$ be the spectral measure of R_t. If we put

$$R_1^{\frac{1}{2^n}} = \int\limits_{\sigma(R_1)} \lambda^{\frac{1}{2^n}} G_1(d\lambda)$$

then by [2], lemma 6, $R_1^{\frac{1}{2^n}}$ is a scalar type operator whose spectral measure $G((-\infty, \lambda])$ is $G_1((-\infty, \lambda^{2^n}])$. On the other hand applying lemma 5 of [2] to $R_{\frac{1}{2^n}}$ we obtain that $G_1((-\infty, \mu]) = G_{\frac{1}{2^n}}((-\infty, \mu^{\frac{1}{2^n}}])$, so that $G((-\infty, \lambda]) = G_{\frac{1}{2^n}}((-\infty, \lambda])$; thus $R_1^{\frac{1}{2^n}}$ and $R_{\frac{1}{2^n}}$ have the same spectral measure, and so are identical. By the semigroup property, and by the functional calculus for scalar type operators, we obtain that

$$R_t = \int\limits_{\sigma(R_1)} \lambda^t G_1(d\lambda) \tag{5}$$

for all numbers t in the set Q of the numbers of the form $\dfrac{m}{2^n}$ ($m = 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, \ldots$). From this formula and again from lemma 5 of [2] we obtain $G_t(\{0\}) = G_1(\{0\})$, hence in view of (3) and (4) we have $E_t(\{0\}) = E_1(\{0\})$ for all $t \in Q$. Consequently, we have for $s, t \in Q$

$$U_t U_s E_{t+s}(\{0\}) = U_t U_s E_1(\{0\}) = U_t U_s E_s(\{0\}) = U_t [U_s E_s(\{0\})] =$$
$$= U_t E_s(\{0\}) = U_t E_1(\{0\}) = U_t E_t(\{0\}) = E_t(\{0\}) = E_1(\{0\}) = E_{t+s}(\{0\})$$

and in view of the lemma,

$$U_{t+s} = U_t U_s \tag{6}$$

for all $s, t \in Q$. Let us put $U_0 = I$, and $U_{-s} = U_s^{-1}$ for $s \in Q$. In virtue of (6), $s \to U_s$ is an operator representation of the additive group $Q' = Q \cup \{-Q\} \cup \{0\}$ of all dyadically rational numbers. But, for all $s > 0$, U_s as a function of T_s

commutes with T_1, hence with R_1, and consequently we have

(7) $$U_s G_1(\sigma) = G_1(\sigma) U_s$$

for all Borel set $\sigma \subset \Omega$. Consider now the cartesian product Γ of the family of Borel sets σ in Ω, and of Q'. Define the „product"

$$(\sigma, s) \circ (\sigma', s') = ((\sigma \cap \sigma') \cup (\bar{\sigma} \cap \bar{\sigma}'), s + s'),$$

where the bar denotes complementation (i. e. $\bar{\sigma} = \Omega - \sigma$); Γ is then an abelian group with unit element $(\Omega, 0)$ and with the inverse $(\sigma, s)^{-1} = (\sigma, -s)$. For all $(\sigma, s) \in \Gamma$ put

$$W(\sigma, s) = [2G_1(\sigma) - I] U_s.$$

Using the fact that $G_1(\sigma)$ is a spectral measure, and the relations (6) and (7), one can easily verify that $(\sigma, s) \to W(\sigma, s)$ is an operator representation of our abelian group Γ. On the other hand the operators $W(\sigma, s)$ are uniformly bounded $[\|W(\sigma, s)\| \leqq \|2G_1(\sigma) - I\| 4K \leqq (8K+1)4K]$, so that we can apply Sz.-Nagy's theorem (in its form generalized to arbitrary abelian groups; see for instance [1], p. 222) and obtain a regular selfadjoint operator A, such that $A^{-1} W(\sigma, s) A$ are all unitary. For $s = 0$ we obtain that $A^{-1}[2G_1(\sigma) - I] A$ are unitary for all Borel sets $\sigma \subset \Omega$, thus $A^{-1} G_1(\sigma) A$ are orthogonal projections, and consequently, in virtue of (5), $A^{-1} R_t A$ is selfadjoint for all $t \in Q$. On the other hand putting $\sigma = \Omega$ and $t \in Q$ we get $W(\Omega, t) = U_t$, so that $A^{-1} U_t A$ are also unitary for all $t \in Q$. But for all $t > 0$ we have $R_t U_t = T_t = U_t R_t$, and hence

$$(A^{-1} R_t A)(A^{-1} U_t A) = A^{-1} T_t A = (A^{-1} U_t A)(A^{-1} R_t A).$$

Since, for all $t \in Q$, $A^{-1} R_t A$ is selfadjoint and $A^{-1} U_t A$ is unitary, their product $A^{-1} T_t A$ is a normal operator. But Q is dense on the positive semi-axis; using the strong continuity of T_t one obtains that $N_t = A^{-1} T_t A$ is normal for all $0 < t < \infty$, so that $\{T_t\}$ is similar to a semigroup of normal operators $\{N_t\}$, which finishes the proof of theorem 1.

I want to express my gratitude to Prof. Béla Sz.-Nagy for his valuable remarks made during the preparation of this paper.

References.

[1] Dixmier, Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications, *Acta Sci. Math.*, **12 A** (1950), 213—227.

[2] N. Dunford, Spectral operators, *Pacific Journal of Math.*, **4** (1954), 321—354.

[3] B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942).

[4] B. Sz.-Nagy, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math.*, **11** (1947), 152—157.

[5] J. Wermer, Commuting spectral measures on Hilbert space, *Pacific Journal of Math.*, **4** (1954) 355—361; see also the review of this paper by Béla Sz.-Nagy in *Zentralblatt f. Math.*, **56** (1955), p. 347.

(Received May 25, 1958.)

Sur une classe de fonctions définies par des inégalités, introduite par M. Á. Császár.*)

Par S. MARCUS à Bucarest.

Introduction.

L'objet principal de ce travail est l'étude d'une classe de fonctions que nous appelons „internes" et qui sont caractérisées par la double inégalité

$$\min (f(x), f(y)) \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max (f(x), f(y)).$$

Une fonction interne présente une structure intéressante chaque fois qu'elle n'est pas monotone. Une solidarité, semblable au lien organique qui existe entre les diverses parties d'une fonction analytique, établit une dépendance étroite entre les propriétés locales et globales de telle fonction. Les fonctions internes et non monotones se dérobent à tout ce qu'il y a habituel dans la théorie des fonctions, du point de vue métrique comme du point de vue topologique.

Dans le § 1 nous rappelons la notion de „fonction interne" due à M. ÁKOS CSÁSZÁR et nous montrons les motifs qui exigent l'introduction de la notion de fonction interne selon la définition ci-dessus. Dans le § 2, une analyse détaillée nous permet de pénétrer dans la structure des fonctions internes et non monotones. Les résultats de ce paragraphe forment la base de tout le travail. Dans le § 3 on établit la structure des fonctions internes, du point de vue de la mesure et de la propriété de Baire. Dans le § 4 nous donnons quelques exemples non triviaux de fonctions internes, exemples qui montrent la différence de structure entre ces fonctions et celles internes au sens de M. Á. CSÁSZÁR. Dans le § 5 on donne une description des ensembles de niveau des fonctions internes et on en fait quelques applications. La „quasi-analyticité" des fonctions internes et non monotones forme l'objet du

*) Qu'il me soit permis d'exprimer ma reconnaissance à M. ÁKOS CSÁSZÁR pour ses remarques me permettant d'améliorer sensiblement la rédaction du présent article.

§ 6. Que se passe-t-il si au lieu de $\frac{x+y}{2}$ on prend, dans la définition des fonctions internes au sens de M. Á. CSÁSZÁR, la valeur $px+qy$, où $p>0$, $q>0$, $p+q=1$? La réponse à cette question est donnée dans le § 7. Le dernier paragraphe contient des applications à certaines équations fonctionnelles.

1. Deux types de fonctions internes.

M. Á. CSÁSZÁR a introduit la notion de „fonction interne" comme il suit [6]: Il appelle une fonction réelle $f(x)$, définie sur (a, b) *interne* sur (a, b), si pour $a<x<y<b$ on a soit

$$\min(f(x), f(y)) < f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max(f(x), f(y))$$

soit

$$\min(f(x), f(y)) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \max(f(x), f(y)).$$

Nous dirons que telle fonction est *strictement interne.*

Les fonctions strictement monotones et les solutions de l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$ sont des exemples de fonctions strictement internes. Comme l'a montré M. Á. CSÁSZÁR dans [6] et [7] et comme nous l'avons montré dans [16], les fonctions strictement internes non monotones fournissent beaucoup de „situations rares" concernant la mesurabilité, la propriété de Baire et la propriété de Darboux des fonctions, la connexion des ensembles, etc. Puis, il existe beaucoup d'équations fonctionnelles dont les solutions sont des fonctions strictement internes. Enfin, il faut remarquer que certaines méthodes utilisées dans l'étude des fonctions internes se montrent utiles aussi dans l'étude d'autres classes de fonctions définies par des inégalités, par exemple les fonctions convexes et les fonctions sousadditives. Nous avons esquissé de tels procédés dans [18], [19] et [20]. Nous avons l'intention de reprendre cette question dans un prochain travail.

Dans la définition des fonctions strictement internes, on prend une précaution de nature très restrictive. En effet, soit $f(x)$ telle que pour $a<x<y<b$ on ait

$$\min(f(x), f(y)) \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max(f(x), f(y))$$

et pour certaines valeurs de x et y on ait

$$\min(f(x), f(y)) < f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \max(f(x), f(y))$$

ou

$$\min(f(x), f(y)) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max(f(x), f(y)).$$

Une telle fonction n'est plus interne, d'après la définition de M. Á. Császár.

Le caractère désavantageux de l'élimination de ces fonctions résulte des trois remarques suivantes:

a) Il existe des fonctions monotones qui ne sont pas strictement internes (par exemple, toute fonction monotone, non constante, qui n'est pas strictement monotone); par contre, toute fonction monotone serait interne, si nous acceptions les deux possibilités ci-dessus.

b) La classe des fonctions strictement internes n'est pas fermée par rapport à l'opération de passage à la limite; en effet, soit $\{f_n\}$ une suite convergente de fonctions strictement internes sur (a, b). On a pour $a<x<y<b$

$$\min(f_n(x), f_n(y)) < f_n\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max(f_n(x), f_n(y))$$

ou

$$\min(f_n(x), f_n(y)) = f_n\left(\frac{x+y}{2}\right) = \max(f_n(x), f_n(y)).$$

Pour $n \to \infty$, on obtient, en posant $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,

$$\min(f(x), f(y)) \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max(f(x), f(y)).$$

c) Chaque fois que nous essayons d'étudier *par un procédé uniforme* les divers types de fonctions définies par des inégalités, c'est la notion de fonction interne (et non pas celle de fonction strictement interne) qui s'offre d'une manière naturelle. Voir par exemple [18], [19] et les théorèmes du § 3 du présent travail.

Il est donc naturel d'étudier la classe des fonctions caractérisées par la définition suivante:

Une fonction réelle $f(x)$, définie sur (a, b), est i n t e r n e *sur (a, b), si pour $a<x<y<b$ on a*

$$\min(f(x), f(y)) \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \max(f(x), f(y)).$$

Par certaines modifications apportées aux raisonnements de M. Á. Császár et en utilisant, en outre, d'autres procédés, nous allons montrer que beaucoup de propriétés des fonctions strictement internes restent valables pour les fonctions internes. En même temps, il y a des propriétés importantes de structure qui distinguent ces deux classes de fonctions.

1. Préliminaires sur les fonctions internes.

Désignons par R l'ensemble des nombres de la forme $\frac{m}{2^n}$, ou $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ et $n=0,1,2,\ldots$. Soit, pour $a<\alpha<\beta<b$, $M(\alpha,\beta)$ l'ensemble des x tels que $a<x<b$ et de la forme $x=p\alpha+q\beta$, où $p,q\in R$ et $p+q=1$. Posons $P(\alpha,\beta)=[\alpha,\beta]\cap M(\alpha,\beta)$.

Remarque. *L'ensemble $M(\alpha,\beta)$ est dense sur (a,b), donc $P(\alpha,\beta)$ l'est sur (α,β).* On voit aussitôt que $\alpha',\beta'\in M(\alpha,\beta)$, $\alpha'<\beta'$ entraîne $M(\alpha',\beta')\subset M(\alpha,\beta)$. En effet, en posant

$$\alpha'=p'\alpha+q'\beta,\quad p',q'\in R,\quad p'+q'=1,$$
$$\beta'=p''\alpha+q''\beta,\quad p'',q''\in R,\quad p''+q''=1,$$

on a pour $p,q\in R$, $p+q=1$

$$p\alpha'+q\beta'=p(p'\alpha+q'\beta)+q(p''\alpha+q''\beta)=(pp'+qp'')\alpha+(pq'+qq'')\beta,$$

où $pp'+qp''\in R$, $pq'+qq''\in R$ et

$$pp'+qp''+pq'+qq''=p(p'+q')+q(p''+q'')=1.$$

On en tire évidemment que $\alpha',\beta'\in P(\alpha,\beta)$ entraîne $P(\alpha',\beta')\subset P(\alpha,\beta)$.

(*) *Les nombres $a_1<b_1<\alpha'<\beta'<a_2<b_2$ étant donnés, il existe des nombres α et β tels que*

$$a_1<\alpha<b_1,\quad a_2<\beta<b_2\quad \textit{et que}\quad \alpha',\beta'\in P(\alpha,\beta).$$

En effet, on peut supposer sans restriction de la généralité que $\alpha'=0$, $\beta'=1$. Soient: $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon<b_1-a_1$, $\varepsilon<b_2-a_2$; un entier m_1 tel que $m_1\varepsilon>b_2-a_1$; un entier n tel que $2^n>m_1(b_2-a_1)$; enfin un entier m tel que $2^n+1<m(b_2-a_1)<2^n+m\varepsilon$. L'existence d'un m de la propriété exigée est aisée à voir; on peut prendre en effet pour m le plus petit entier tel que $2^n+1<m(b_2-a_1)$, car on aura alors $m>m_1$, donc

$$2^n+m\varepsilon-(2^n+1)=m\varepsilon-1>m_1\varepsilon-1>b_2-a_1.$$

En posant donc $m(b_2-a_1)=2^n+m\eta$ on a $1<m\eta<m\varepsilon$, donc

$$\frac{1}{m}<\eta<\varepsilon.$$

On peut trouver donc un entier k tel que

$$a_1<\frac{k}{m}<a_1+\eta<a_1+\varepsilon$$

et, en vertu de l'égalité $b_2-a_1-\eta=\frac{2^n}{m}$, que

$$b_2-\varepsilon<b_2-\eta<\frac{k+2^n}{m}<b_2.$$

Posons

$$\alpha=\frac{k}{m}, \quad \beta=\frac{k+2^n}{m}.$$

On a en ce cas

$$a_1<\alpha<a_1+\varepsilon<b_1, \quad a_2<b_2-\varepsilon<\beta<b_2$$

et

$$\frac{k+2^n}{2^n}\alpha-\frac{k}{2^n}\beta=0=\alpha', \quad \frac{k+2^n-m}{2^n}\alpha+\frac{m-k}{2^n}\beta=1=\beta'.$$

C. q. f. d.

Or, les nombres $a<\alpha<\beta<b$ étant donnés, on construit au moyen de la proposition (*) deux suites $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ telles que

$$a<\alpha_n<\alpha_{n-1},\ \alpha_n\to a; \quad \beta_{n-1}<\beta_n<b,\ \beta_n\to b$$

et que

$$\alpha, \beta\in P(\alpha_1, \beta_1), \quad \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}\in P(\alpha_n, \beta_n),$$

tout cela étant valable même pour $a=-\infty$, $b=+\infty$. La fonction $f(x)$ étant interne sur (a, b), on constate aussitôt qu'elle est monotone sur chacun des ensembles $P(\alpha_n, \beta_n)$, donc en conséquence de $P(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})\subset P(\alpha_n, \beta_n)$, elle est monotone sur leur réunion. ($f(x)$ est soit constante sur chacun d'eux, soit il existe un indice minimum n tel que $f(x)$ n'est pas constante sur $P(\alpha_{n_0}, \beta_{n_0})$ et alors $f(x)$ est monotone non-décroissante ou non croissante sur $P(\alpha_n, \beta_n)$ pour $n>n_0$, suivant qu'elle l'est pour $n=n_0$.) Or, on a évidemment $M(\alpha, \beta)\subset M(\alpha_n, \beta_n)$, donc

$$M(\alpha, \beta)\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P(\alpha_n, \beta_n),$$

d'où il résulte:

L e m m e 1*). *Si $a<\alpha<\beta<b$ et si $f(x)$ est interne sur (a, b), alors $f(x)$ est monotone sur $M(\alpha, \beta)$.*

Nous allons utiliser souvent dans la suite la suivante

R e m a r q u e. *Si $f(x)$ est interne sur (a, b) et si $a<\alpha<\beta<b$, alors on a, pour chaque $x\in[\alpha, \beta]\cap M(\alpha, \beta)$,*

$$\min(f(\alpha), f(\beta))\leqq f(x)\leqq \max(f(\alpha), f(\beta)).$$

En particulier, si $f(\alpha)=f(\beta)$, alors $f(x)$ est constante sur $[\alpha, \beta]\cap M(\alpha, \beta)$.

L e m m e 2. *Une fonction réelle $f(x)$, interne sur (a, b), constante $(=k)$ sur (α, β) $(a<\alpha<\beta<b)$, est monotone sur (a, b).*

---

*) La forme initiale du lemme 1, donnée par l'auteur, n'était valable, comme l'a remarqué M. Á. Császár, que dans le cas $(a, b)=(-\infty, \infty)$. La définition ci-dessus de l'ensemble $M(\alpha, \beta)$ ainsi que la démonstration du lemme 1, sont dûes à M. Á. Császár.

Démonstration. On peut supposer que $f(x)$ n'est pas constante sur (a, b). Soit alors $\xi \in (a, b)$ tel que $f(\xi) \neq k$. Soit, pour fixer les idées, $\xi < \alpha$ et $f(\xi) < k$.

Considérons un point η tel que $\beta < \eta < b$. Si l'on avait $f(\eta) < k$, alors, en vertu de la remarque qui suit le lemme 1, on aurait $f(x) < k$ pour chaque $x \in [\xi, \eta] \cap M(\xi, \eta)$, ce qui est contradictoire, parce que l'ensemble $M(\xi, \eta)$ possède des points sur (α, β) où $f(x)$ est égale à k. On a donc $f(x) \geqq k$ pour chaque x tel que $\beta < x < b$,

Supposons que $a < u < \xi$ et que $f(u) > k$. Alors, d'après le lemme 1, $f(x)$ est monotone décroissante sur $M(u, \xi)$. Mais en ce cas on a, pour $x \in (\alpha, \beta) \cap M(u, \xi)$, $f(x) \leqq f(\xi) < k$, ce qui est contradictoire.

Supposons enfin que $\xi < \nu < \alpha$ et que $f(\nu) > k$. Alors, d'après le lemme 1, $f(x)$ est monotone croissante sur $M(\xi, \nu)$. Mais en ce cas on a, pour $x \in (\alpha, \beta) \cap M(\xi, \nu)$, $k < f(\nu) \leqq f(x)$, ce qui est contradictoire.

En tout cas, pour chaque $x < \alpha$ on a $f(x) \leqq k$ et pour chaque $x > \beta$ on a $f(x) \geqq k$.

Soit maintenant $a < x < y < b$. Si $x < \alpha < \beta < y$, alors on a $f(x) \leqq f(y)$. Si $a < x < y < \alpha$ et si l'on avait $f(x) > f(y)$, alors, en considérant un point

$$z \in (\alpha, \beta) \cap M(x, y)$$

il résulterait, en vertu du lemme 1,

$$f(x) > f(y) \geqq f(z) = k.$$

Mais, en tenant compte que $x < \alpha$ et d'après la conclusion ci-dessus, on a

$$f(x) \leqq f(z).$$

On a abouti ainsi à une contradiction qui montre qu'en ce cas aussi on a $f(x) \leqq f(y)$.

Une conclusion analogue s'obtient pour $\beta < x < y < b$.

On a démontré ainsi que $f(x)$ est monotone croissante sur (a, b). Si l'on avait $f(\xi) > k$, alors il résulterait que $f(x)$ est monotone décroissante sur (a, b).

Lemme 3. *Si $f(x)$ est interne sur (a, b) et monotone sur $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, alors $f(x)$ est monotone sur (a, b).*

Démonstration. Si $f(x)$ est constante sur un intervalle partiel de (α, β), alors, en vertu du lemme 2, elle est monotone sur (a, b). Supposons donc que $f(x)$ soit strictement monotone sur (α, β) et, pour faire un choix, supposons-la croissante sur (α, β). Soient maintenant x et y tels que $a < x < y < b$ et $f(x) \neq f(y)$. L'ensemble $M(x, y)$ est, comme on sait, dense sur (a, b). Il existe donc $u < \nu$ tels que $u \in (\alpha, \beta) \cap M(x, y)$, $\nu \in (\alpha, \beta) \cap M(x, y)$.

On a, par hypothèse, $f(u)<f(v)$ et, en vertu du lemme 1, on a aussi $f(x)<f(y)$. Donc $f(x)$ est monotone croissante sur (a, b).

Si l'on supposait que $f(x)$ est décroissante sur (α, β), on obtiendrait la monotonie décroissante sur (a, b).

Remarque. En vertu du lemme 3, l'expression „fonction interne non monotone" a un sens complètement déterminé.

Théorème 1. *Soit $f(x)$ interne et non monotone sur (a, b). Désignons par m et M les bornes de $f(x)$ sur (a, b) (y compris le cas $m=-\infty$ ou $M=+\infty$).*

En chaque point de (a, b) les limites inférieures à gauche et à droite de $f(x)$ sont égaux à m, tandis que les limites supérieures à gauche et à droite de $f(x)$ sont égaux à M.

Démonstration. Supposons que a, b, m et M sont finis. Il existe un point $\xi \in [a, b]$ où $f(x)$ a la borne inférieure égale à m et un point $\eta \in [a, b]$ où $f(x)$ a la borne supérieure égale à M. Supposons $\xi \neq \eta$ et, pour faire un choix, $\xi < \eta$.

Soit $\varepsilon>0$ tel que $m+\varepsilon<M-\varepsilon$. Il existe deux points x et y tels que $x<y$, $f(x)<m+\varepsilon$ et $f(y)>M-\varepsilon$. On a donc $f(x)<f(y)$.

D'après le lemme 1, $f(x)$ est monotone croissante sur $M(x, y)$, donc il existe un ensemble dense sur (a, x) où $f(x)$ prend des valeurs inférieures à $m+\varepsilon$ et un ensemble dense sur (y, b), où $f(x)$ prend des valeurs supérieures à $M-\varepsilon$. En tenant compte de ce que x, resp. y, peuvent être pris aussi proches qu'on veut de ξ, resp. η et que ε peut être arbitrairement petit, il s'ensuit qu'en chaque point de l'intervalle (a, ξ) la borne inférieure de $f(x)$ est égale à m et qu'en chaque point de l'intervalle (η, b) la borne supérieure de $f(x)$ est égale à M.

En vertu du lemme 2, $f(x)$ n'est pas constante sur (a, ξ). Il existe donc un point ω tel que $a<\omega<\xi$ et $f(\omega)>m$. D'autre part, dans chaque voisinage de ξ il existe un point ω_1 tel que $\omega<\omega_1$ et $f(\omega)>f(\omega_1)$.

D'après le lemme 1, $f(x)$ est monotone décroissante sur l'ensemble $M(\omega, \omega_1)$, donc il existe sur l'intervalle (ω_1, b) un ensemble dense de points où les valeurs de $f(x)$ sont inférieures à $f(\omega_1)$. Le point ω_1 pouvant être choisi aussi près qu'on veut de ξ et tel que la valeur $f(\omega_1)$ soit aussi voisine qu'on veut de m, il s'ensuit qu'en chaque point de l'intervalle (ξ, b) la borne inférieure de $f(x)$ est égale à m.

D'une manière analogue on prouve qu'en chaque point de l'intervalle (a, η) la borne supérieure de $f(x)$ est égale à M.

Si l'on a $\xi=\eta$, le raisonnement est presque le même.

Dans le cas où certains des nombres a, b, m et M sont infinis, les modifications dans le raisonnement ci-dessus sont tellement évidentes, que nous nous dispensons d'en donner les détails.

Le théorème en résulte tout de suite.

Remarque. Le théorème 1, pour les fonctions strictement internes, résulte, par une voie tout à fait différente, du lemme 4 de [6]. Voir aussi le théorème 4 de [16].

Corollaire 1. Si $f(x)$ est interne et non monotone sur (a, b), alors, pour $a<\alpha<b$ tel que $m<f(\alpha)$, resp. $f(\alpha)<M$, l'ensemble

$$\{x; f(x)<f(\alpha)\}, \text{ resp. } \{x; f(x)>f(\alpha)\}$$

est partout dense sur (a, b).

Corollaire 2. Si $f(x)$ est interne et non monotone sur (a, b), alors l'ensemble

$$\{x; f(x)=m\}$$

est vide ou partout dense sur (a, b). La même chose est vraie pour l'ensemble $\{x; f(x)=M\}$.

Des corollaires 1 et 2 on déduit le

Corollaire 3. *Si $f(x)$ est interne et non monotone sur (a, b), alors chacun des ensembles*

$$\{x; f(x)\leqq f(\alpha)\}, \ \{x; f(x)\geqq f(\alpha)\}$$

est partout dense sur (a, b) pour tout α tel que $a<\alpha<b$.

3. Mesurabilité, propriété de Baire et fonctions internes.

Théorème 2. *Si $f(x)$ est interne et non monotone sur (a, b), si $a<\alpha<\beta<2\beta-\alpha<b$ et si $m<f(\alpha)<M$, $m<f(\beta)<M$, alors l'ensemble*

$$E=\{x; \min(f(\alpha), f(\beta))<f(x)<\max(f(\alpha), f(\beta)), \alpha<x<\beta\}$$

est de mesure intérieure nulle et ne contient aucun ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire.

Démonstration. On suit une voie analogue à celle du lemme de [7].

Si $f(\alpha)=f(\beta)$, on n'a rien à démontrer. Supposons donc $f(\alpha)\neq f(\beta)$ et, pour fixer les idées, soit $f(\alpha)<f(\beta)$. Soit E_1 un sous-ensemble mesurable de E et supposons, par réduction à l'absurde, que $\mu(E_1)>0$. (Par μ on désigne toujours la mesure de Lebesgue.) Il existe un sous-intervalle I de (α, β), tel que $\mu(E_1\cap I)>0$. Puisque $2\beta-\alpha<b$, l'ensemble E_3, symétrique à $E_2= =E_1\cap I$ par rapport au point β, est contenu dans (a, b) et on a, pour $x\in E_3$,

$f(\beta) \leqq f(x)$. En vertu du corollaire 1 du théorème 1 et du fait que $m < f(\alpha)$, l existe une suite $\{\beta_n\}$ de nombres tels que $f(\beta_n) < f(\alpha)$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \beta_n = \beta$. En désignant par E_4^n le symétrique de E_3 par rapport au point β_n et en tenant compte de ce que pour $x \in E_3$ on a $f(x) > f(\beta_n)$, on déduit que, pour tout entier n suffisamment grand, $x \in E_4^n$ entraîne $f(x) \leqq f(\beta_n) < f(\alpha)$. On constate ainsi que $E_2 \cap E_4^n = 0$ pour chaque n assez grand; mais, d'autre part, on constate que E_4^n se déduit de E_2 par une translation de composante $2(\beta_n - \beta)$ et, en vertu d'un théorème de STEINHAUS [24], on doit avoir, pour n assez grand, $E_2 \cap E_4^n \neq 0$. La contradiction obtenue achève la démonstration.

Pour démontrer la partie descriptive du théorème 2, on suit une voie analogue, en tenant compte des faits suivants:

Si un ensemble A est de deuxième catégorie et jouit de la propriété de Baire, alors il existe un intervalle par rapport auquel le complémentaire de A est de première catégorie;

la catégorie d'un ensemble se conserve par une translation ou une symétrie;

si un ensemble A est de deuxième catégorie et jouit de la propriété de Baire, alors il existe un $\omega > 0$ tel que tout ensemble qui s'obtient de A par une translation inférieure à ω a des points communs avec A.

R e m a r q u e. La condition $2\beta - \alpha < b$ peut être évitée dans le théorème 2, ainsi que l'on fait dans [7]. Mais pour les besoins de ce travail, cette condition n'est pas restrictive.

Une fonction $f(x)$ est *qualitativement continue* au point ξ s'il existe un ensemble R, résiduel sur un certain voisinage de ξ et tel que $f(x)$ est continue, par rapport à R, au point ξ [17].

T h é o r è m e 3. *Si une fonction $f(x)$, interne et non monotone sur (a, b), est approximativement ou qualitativement continue en un point $\xi \in (a, b)$, alors on a $f(\xi) = m$ ou $f(\xi) = M$* (m et M étant les bornes de $f(x)$ sur (a, b)).

D é m o n s t r a t i o n. En essence, la démonstration est analogue à celle du théorème de [7].

Supposons par réduction à l'absurde, qu'il existe un point ξ de continuité approximative, tel que $a < \xi < b$ et $m < f(\xi) < M$. Il existe alors un ensemble A, ayant ξ pour point de densité et tel que $f(x)$ soit continue, par rapport à A, au point ξ. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $m < f(\xi) - \varepsilon$ et $f(\xi) + \varepsilon < M$. Il existe un $\eta > 0$ tel que $\xi + 3\eta < b$ et $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ pour chaque $x \in B = A \cap [\xi - \eta, \xi + \eta]$. L'ensemble B est donc de mesure intérieure positive, mais, d'autre part, en faisant usage du théorème 2 (avec $\alpha = \xi - \eta$, $\beta = \xi + \eta$), on constate que B est de mesure intérieure nulle.

Si ξ était un point de continuité qualitative, alors il existerait un ensemble A résiduel dans un certain voisinage de ξ, tel que $f(x)$ soit continue, par rapport à A, au point ξ. En faisant usage de la partie descriptive du théorème 2, on aboutit, de la même manière que ci-dessus, à une contradiction qui démontre le théorème.

Le résultat que nous venons d'obtenir pose le problème de la mesurabilité et de la propriété de Baire des fonctions internes et non monotones. On sait, d'après un théorème de DENJOY, qu'une fonction mesurable et finie est approximativement continue presque partout et, d'autre part, il s'ensuit, d'après un théorème de KURATOWSKI, qu'une fonction jouissant de la propriété de Baire est qualitativement continue en chaque point, à l'exception possible d'un ensemble de première catégorie ([14], p. 306 ou [17], p. 260). C'est M. Á. CSÁSZÁR qui, en utilisant nos théorèmes 1 et 3 ci-dessus, a démontré, le premier, la non mesurabilité de toute fonction interne et non monotone. Puis, nous avons esquissé une autre voie pour trouver le résultat de M. Á. CSÁSZÁR [18].

En utilisant certains résultats de S. PICCARD, nous nous proposons ici de résoudre les problèmes suivants, qui pour les fonctions strictement internes et non monotones ont reçu une réponse négative ([7] et théorème 3 de [16]): Est-il possible qu'une fonction interne et non monotone possède: 1° un point de continuité approximative? 2° un point de continuité qualitative? Est-il possible qu'une fonction interne et non monotone 1° soit mesurable par rapport à un ensemble de mesure positive? 2° possède la propriété de Baire par rapport à un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire?

Il est clair, en vertu des théorèmes de DENJOY et de KURATOWSKI, que la réponse négative aux deux premiers problèmes entraîne la réponse négative pour les deux derniers. Nous allons donc nous occuper des deux premiers. Mais voyons d'abord un lemme qui, d'ailleurs, sera fondamental dans ce qui suit.

On dit qu'un ensemble E, linéaire, est *médian* si pour $x \in E$, $y \in E$, on a $\frac{x+y}{2} \in E$.

Lemme 4. *Un ensemble médian et frontière est de mesure intérieure nulle. Tout ensemble jouissant de la propriété de Baire, contenu dans un ensemble médian et frontière, est de première catégorie.**)

Démonstration. S. PICCARD a démontré le théorème suivant: Si un ensemble linéaire A est de mesure positive ou s'il est de deuxième catégorie

*) Pour la partie métrique de ce lemme voir aussi [18], ou cet énoncé est obtenu par une autre voie.

et jouit de la propriété de Baire, alors l'ensemble $S(A)$ des nombres de la forme $x+y$, où $x\in A$, $y\in A$, contient un intervalle ([23], p. 187).

Dans les conditions du théorème de S. PICCARD, on déduit que l'ensemble $\frac{1}{2}S(A)$ des nombres $\frac{x+y}{2}$, où $x\in A$, $y\in A$, contient aussi un intervalle. Soit alors E médian; on a $\frac{1}{2}S(E)\subset E$, donc si E était de mesure intérieure positive, il contiendrait un intervalle et ne pourrait être un ensemble frontière. D'une manière analogue on prouve la partie descriptive du lemme 4.

Nous dirons qu'un ensemble A est de *mesure extérieure complète* sur un ensemble mesurable E, si la mesure de E est égale à la mesure extérieure de $A\cap E$.

Théorème 4. *Pour toute $f(x)$ interne et non monotone sur (a, b) et pour tout α et β tels que $m<\alpha<\beta<M$ (m et M étant les bornes de $f(x)$ sur (a, b)), chacun des ensembles:*

$$\{x; f(x)<\alpha, a<x<b\},\quad \{x; f(x)\leqq\alpha, a<x<b\},$$
$$\{x; f(x)\geqq\alpha, a<x<b\},\quad \{x; f(x)>\alpha, a<x<b\}$$

est de mesure extérieure complète sur tout ensemble mesurable de (a, b); l'ensemble

$$\{x;\ \alpha\leqq f(x)\leqq\beta, a<x<b\}$$

est de mesure intérieure nulle.

Tout ensemble jouissant de la propriété de Baire, contenu dans l'un des cinq ensembles ci-dessus, est de première catégorie.

Démonstration. D'après la définition des fonctions internes, les ensembles ci-dessus sont des ensembles médians. En vertu de la non monotonie de $f(x)$ et d'après le théorème 1, tous les ensembles ci-dessus sont des ensembles frontières. En vertu du lemme 4, tous ces ensembles sont de mesure intérieure nulle et ne contiennent aucun ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire. Le complémentaire d'un des premiers quatre ensembles est aussi parmi les premiers quatre. Il reste à utiliser le théorème H du § 14 de [9].

Théorème 5. *Une fonction interne et non monotone n'admet aucun point de continuité approximative et aucun point de continuité qualitative.*

Démonstration. D'après le théorème 3, si ξ est un point de continuité approximative, alors on a $\xi\in H=\{x; f(x)=m\}\cup\{x; f(x)=M\}$. Supposons, pour fixer les idées, que $\xi\in\{x; f(x)=m\}$. Il existe donc, pour $\varepsilon>0$, un ensemble G de mesure positive, ayant ξ comme point de densité et tel que $f(x)<f(\xi)+\varepsilon=m+\varepsilon$ pour $x\in G$. Supposons que ε soit assez petit pour que

$m+\varepsilon<M$. Puisque $f(x)$ est interne, l'ensemble $L=\{x; a<x<b, f(x)<m+\varepsilon\}$ est un ensemble médian. En vertu de la non monotonie de $f(x)$ et du corollaire 1 du théorème 1, L est un ensemble frontière et, donc, d'après le lemme 4, il a la mesure intérieure nulle. Mais cella est en contradiction avec l'inégalité ci-dessus.

Démontrons que $f(x)$ n'admet aucun point ξ de continuité qualitative. Supposons par réduction à l'absurde, que tel point existe. D'après le théorème 3, on a $\xi \in H$. Supposons, pour fixer les idées, que $\xi \in \{x; f(x)=m\}$. Il existe donc, pour $\varepsilon>0$, un $\eta>0$ et un ensemble R qui est un résiduel sur l'intervalle $(\xi-\eta, \xi+\eta)$, tels que $f(x)<f(\xi)+\varepsilon=m+\varepsilon$ pour $x \in R$. Mais cette inégalité est en contradiction avec le fait que l'ensemble L $(\supset R)$, étant médian et frontière, ne contient, en vertu du lemme 4, aucun ensemble de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de Baire.

R e m a r q u e. Le théorème 5 généralise le théorème de M. Á. CSÁSZÁR de [7]. En même temps, le théorème 5 résout en sens négatif tous les problèmes que nous avons posés au commencement de ce paragraphe.

On sait [22] que toute fonction convexe sur $[a, b]$, supérieurement bornée sur un ensemble de mesure positive contenu dans (a, b) est supérieurement bornée sur (a, b). D'autre part, M. HUKUHARA a montré [11] que ce théorème reste vrai si l'on remplace le mot „supérieurement" par le mot „inférieurement".

Y a-t-il une propriété analogue pour les fonctions internes? Si $f(x)$ est interne sur (a, b) et si M est sa borne supérieure sur un certain ensemble F de mesure positive, alors l'ensemble $E=\{x; f(x)\leqq M, a<x<b\}$ est médian et, en vertu du lemme 4, il contient un intervalle $I\subset(a, b)$. En tenant compte du théorème 1 et en supposant, en outre, que $f(x)$ n'est pas monotone sur (a, b), il s'ensuit que $f(x)\leqq M$ pour chaque $x\in(a, b)$.

Un raisonnement analogue s'applique au cas où F est un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire. (Dans ce cas on va utiliser la partie descriptive du lemme 4.) D'autre part, on peut raisonner de la même manière pour la borne inférieure de $f(x)$ et on aboutit ainsi au

T h é o r è m e 6. *Si une fonction $f(x)$, interne et non monotone sur (a, b), admet sur un certain ensemble de mesure positive ou de deuxième catégorie et jouissant de la propriété de Baire, les bornes m et M, alors m et M sont les bornes de $f(x)$ sur (a, b).*

4. Quelques exemples non triviaux de fonctions internes et non monotones.

Pour donner une justification complète à l'étude des fonctions internes, il faut montrer, par exemples, l'existence des fonctions internes qui ne sont ni monotones, ni strictement internes. Nous allons démontrer non seulement l'existence de telles fonctions, mais aussi des fonctions internes qui jouissent de certaines propriétés de structure qui n'apparaissent jamais dans la classe des fonctions strictement internes.

On sait, d'après le lemme 4 de [6] (ou le théorème 4 de [16]) qu'une fonction strictement interne et non monotone n'atteint en aucun point ni sa borne inférieure, ni sa borne supérieure. Ce n'est pas le cas pour les fonctions internes et non monotones, comme le montre notre

Exemple 1. *Il existe une fonction $f(x)$ interne, non monotone, qui n'est pas strictement interne et telle que les ensembles $\{x; f(x)=m\}$ et $\{x; f(x)=M\}$ ne sont pas vides (m et M étant les bornes de $f(x)$).*

Démonstration. Soit $\varphi(x)$ une solution discontinue de l'équation fonctionnelle $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x+y)$. On sait que le graphique de telle fonction est partout dense dans le plan. D'autre part, $\varphi(x)$ est évidemment strictement interne. Considérons trois constantes k, m et M telles que $m<M$, $k>0$ et posons

$$\psi(u)=\begin{cases} m, \text{ si } u<-k \\ \text{strictement croissante de } m \text{ à } M \text{ si } -k\leqq u\leqq k \\ M, \text{ si } u>k \end{cases}$$

et

$$f(x)=\psi(\varphi(x)).$$

Une fonction monotone d'une fonction interne étant évidemment interne, $f(x)$ est interne. D'autre part, $f(x)$ n'est pas strictement interne, car les ensembles $\{x; f(x)=m\}$, $\{x; f(x)=M\}$ ne sont pas vides (théorème 4 de [16]).

Le graphique de $\varphi(x)$ étant dense dans le plan, il existe des $x<y$ tels que $-k<\varphi(x)<\varphi(y)<k$. Il y a aussi un z tel que $x<z<y$ et $\varphi(y)<\varphi(z)<k$, donc en vertu de la monotonie strictement croissante de $\psi(u)$ sur $(-k, k)$ on déduit $f(x)<f(y)<f(z)$ et il s'ensuit ainsi que f n'est pas monotone.

Une fonction strictement interne et non monotone prend toujours une infinité de valeurs distinctes. Ce n'est pas le cas pour les fonctions internes et non monotones, comme le montre notre

Exemple 2. *Il existe une fonction $f(x)$ interne et non monotone, qui prend seulement deux valeurs (donc $f(x)$ n'est pas strictement interne).*

Démonstration. Soient $\alpha<\beta$. Posons

$$\psi(u)=\begin{cases}\alpha, & \text{si } u\leqq 0,\\ \beta, & \text{si } u>0.\end{cases}$$

Soit $\varphi(x)$ une fonction interne et non monotone sur toute la droite, ayant la borne inférieure <0, la borne supérieure >0. Posons $f(x)=\psi(\varphi(x))$; $f(x)$ est interne. D'autre part, il est visible que $f(x)$ prend seulement deux valeurs: α et β. Si $f(x)$ était monotone, par exemple monotone croissante, il existerait un point ξ tel que $f(x)\equiv\alpha$ pour $x<\xi$ et $f(x)\equiv\beta$ pour $x>\xi$. Cela veut dire que pour $x<\xi$ on aurait $\varphi(x)<0$, donc pour $x<\xi$ la borne supérieure de $\varphi(x)$ serait $\leqq 0$. Mais alors, d'après le théorème 6, la borne supérieure de $\varphi(x)$ serait $\leqq 0$ sur toute la droite, ce qui est en contradiction avec la définition de $\varphi(x)$. Donc $f(x)$ n'est pas monotone.

Corollaire 1. *Il existe une décomposition de la droite en deux ensembles médians, partout denses.*

Démonstration. En effet, les deux ensembles de niveau de la fonction $f(x)$ de l'exemple 2 en fournissent la décomposition cherchée.

Corollaire 2. *Si $A\cup B$ est une décomposition de la droite réelle en deux ensembles disjoints, médians et partout denses, alors A et B sont non mesurables au sens de Lebesgue et dépourvus de la propriété de Baire.*

Démonstration. Soit $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble A. $f(x)$ est interne et non monotone. D'après le théorème 5, $f(x)$ est non mesurable et dépourvue de la propriété de Baire. On a $A=\{x; f(x)>0\}$ donc A et B jouissent des propriétés annoncées.

On pourrait croire, en regardant les exemples 1 et 2, que le fait que les ensembles $\{x; f(x)=m\}$, $\{x; f(x)=M\}$ ne sont pas vides est obligatoire pour les fonctions internes et non monotones, qui ne sont pas strictement internes. Ce n'est pas le cas, comme le montre notre

Exemple 3. *Il existe une fonction $f(x)$, interne, non monotone et non strictement interne, telle que les ensembles $\{x; f(x)=m\}$, $\{x; f(x)=M\}$ sont vides (m et M sont les bornes de $f(x)$).*

Démonstration. Soit $\varphi(x)$ une solution discontinue de l'équation $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$. Soit $k>0$. Soit $\psi(u)$ égale à une constante λ pour $-k<u<k$, strictement croissante sur $(-\infty, k)$ et sur (k,∞), telle que $\psi(-k-0)<\lambda<\psi(k+0)$. Il s'ensuit que $\psi(u)$ est une fonction monotone croissante sur $(-\infty,\infty)$ et que les valeurs $m=\lim\limits_{u\to-\infty}\psi(u)$, $M=\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)$ ne sont prises par $\psi(u)$ en aucun point.

Considérons la fonction $f(x)=\psi(\varphi(x))$. Comme dans les exemples ci-dessus, on montre que $f(x)$ est interne. Soient maintenant deux points x

et y tels que $-k<\varphi(x)<\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)<k<\varphi(y)$. Pour x et y on peut prendre, par exemple, deux points rationnels, tels que $-k<x\cdot\varphi(1)<\frac{x+y}{2}\cdot\varphi(1)<k<$ $<y\cdot\varphi(1)$, car on sait que toute solution $\varphi(x)$ de l'équation fonctionnelle de Cauchy a, sur l'ensemble des nombres rationnels, l'expression ax, où $a=\varphi(1)$. On a ainsi, d'après la définition de $\psi(u)$, $\lambda<\psi(\varphi(y))$, donc

$$\min(f(x), f(y)) = \min(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(y))) = \min(\lambda, \psi(\varphi(y))) = \lambda =$$
$$= \psi\left(\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) <$$
$$< \psi(\varphi(y)) = \max(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(y))) = \max(f(x), f(y)),$$

donc $f(x)$ n'est pas strictement interne.

En tenant compte de ce que le graphique de $\varphi(x)$ est partout dense dans le plan et que $\psi(u)$ est croissante, on montre comme dans l'exemple 1 que $f(x)$ n'est pas monotone.

Enfin, l'ensemble des valeurs de $f(x)$ étant le même que l'ensemble des valeurs de $\psi(u)$, on déduit que les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ sur $(-\infty, \infty)$ sont m et M et qu'il n'existe aucun x tel que $f(x)=m$ ou $f(x)=M$.

5. La structure des ensembles de niveau des fonctions internes et non monotones.

Rappelons qu'on appelle *ensemble de niveau* d'une fonction $f(x)$ l'ensemble des points où $f(x)$ prend la même valeur. Les ensembles de niveau (brièvement: les niveaux) d'une fonction interne non monotone ont des propriétés remarquables et conduisent à certains exemples rares de la théorie des ensembles ou des fonctions.

Nous allons supposer dans ce paragraphe que $f(x)$ est définie sur $(-\infty, \infty)$.

Proposition 1. *Tout ensemble de niveau d'une fonction strictement interne (resp. interne) et non monotone présente une et seulement une des trois situations suivantes:*

a) *il est vide;*

b) *il est formé d'un seul point;*

c) *il est un ensemble frontière, partout dense (resp. dense sur un certain intervalle).*

Pour la démonstration, il suffit de tenir compte du lemme de [6] (resp. de la remarque qui suit la démonstration du lemme 1 de la présente note).

D é f i n i t i o n. On dit que ξ est un *point de symétrie* d'un ensemble E, si pour $x \in E$ on a $2\xi - x \in E$.

P r o p o s i t i o n 2. *Chaque point d'un ensemble de niveau* $E \neq 0$ *d'une fonction strictement interne est un point de symétrie pour* E *et pour le complémentaire de* E. *Aucun point étranger à* E *n'est point de symétrie pour* E.

En effet, si E est du type b) (voir la proposition 1), la proposition 2 est évidente. Si E est du type c), soient $\xi \in E$, $x \in E$. D'après la définition des fonctions strictement internes, on a $2\xi - x \in E$. Pour $\xi \in E$, $x \notin E$, on a $2\xi - x \notin E$.

Si $\xi \notin E$ et $x \in E$, on a $2\xi - x \notin E$ (toujours en tenant compte de la définition des fonctions strictement internes).

P r o p o s i t i o n 3. *Tout ensemble de niveau* E *d'une fonction interne et non monotone est de mesure intérieure nulle au sens de Lebesgue.*

En effet, dans le cas contraire la fonction serait constante sur un certain ensemble de mesure positive (le noyau mesurable de E), en contradiction avec le théorème 5.

C o r o l l a i r e. *Si chaque ensemble de niveau d'une fonction interne et non monotone est mesurable au sens de Lebesgue, alors l'ensemble des valeurs de la fonction est non dénombrable.*

P r o p o s i t i o n 4. *Tout ensemble jouissant de la propriété de Baire, contenu dans un ensemble de niveau d'une fonction interne et non monotone, est de première catégorie.*

En effet,- il suffit de tenir compte du théorème 5.

C o r o l l a i r e. Si chaque ensemble de niveau d'une fonction interne et non monotone jouit de la propriété de Baire, l'ensemble des valeurs de cette fonction est non dénombrable.

P r o p o s i t i o n 5. *Si* m *et* M *sont les bornes d'une fonction* $f(x)$ *strictement interne (resp. interne) et non monotone, alors chacun des ensembles* $\{x; f(x) = m\}$, $\{x; f(x) = M\}$ *est vide (resp. vide ou partout dense).*

En effet, si $f(x)$ est strictement interne et non monotone, notre assertion est démontrée en [16]. Pour $f(x)$ interne et non monotone, voir le corollaire 2 du théorème 1. Admettons, pour un instant, les valeurs $\pm\infty$ pour $f(x)$.

De la définition des fonctions strictement internes il ne résulte pas, au moins à priori, qu'une fonction strictement interne et non monotone ne pourrait prendre des valeurs infinies. On a pourtant comme conséquence immédiate de la proposition 5 la

Proposition 6. *Une fonction strictement interne et non monotone est finie.*

Remarque. La finitude des fonctions de Hamel a été établie par I. HALPERIN [10].

Proposition 7. *Il existe une fonction interne et non monotone, qui n'est pas finie.*

En effet, considérons une décomposition de la droite en deux ensembles A et B, médians et partout denses (telle décomposition existe, d'après le corollaire 1 de l'exemple 2). La fonction

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x\in A \\ \infty, & \text{si } x\in B \end{cases}$$

satisfait aux conditions de l'énoncé.

Proposition 8. *La fonction caractéristique d'un ensemble de niveau E d'une fonction strictement interne, admet la dérivée symétrique nulle en chaque point de E.*

Conséquence de la proposition 2.

Proposition 9. *Soit E est un ensemble de niveau du type* c) *(voir la Proposition 1) d'une fonction strictement interne non monotone. La fonction caractéristique $\varphi(x)$ de E admet alors la dérivée symétrique (nulle) en chaque point de E et seulement en ces points. La fonction $\varphi(x)$ est discontinue en chaque point.*

Conséquence des propositions 1 et 8.

Z. CHARZYNSKI a démontré [5] que, pour une fonction qui admet en chaque point la dérivée symétrique nulle, l'ensemble des points de discontinuité est clairsemé (donc dénombrable). Il se pose alors le problème: Quel est l'ensemble „maximum" où une fonction peut admettre la dérivée symétrique nulle, en restant discontinue en chaque point? Une réponse est donnée par la

Proposition 10. *Il existe une fonction $f(x)$, discontinue partout et dont l'ensemble des points où la dérivée symétrique est nulle, est de mesure extérieure complète sur chaque intervalle.*

Pour le démontrer, considérons une base de Hamel H qui rencontre tout ensemble parfait (l'existence de pareille base a été démontrée par BURSTIN [3]) et soit $\psi(x)$ une fonction égale à 1 sur H et définie dans le reste par le procédé de Hamel. $\psi(x)$, comme solution de l'équation $\psi(x+y)=$ $=\psi(x)+\psi(y)$, est une fonction strictement interne. Il est aisé de voir que tout ensemble de niveau de $\psi(x)$ est de mesure extérieure complète sur chaque intervalle. (Pour l'ensemble $\{x; \psi(x)=1\}$ ceci est évident, car il contient l'ensemble H; pour les autres niveaux, il en résulte du fait que les niveaux de $\psi(x)$ se déduisent l'un de l'autre par une translation). En tenant compte de la proposition 9, on déduit que la fonction caractéristique d'un ensemble de niveau de $\psi(x)$ jouit des propriétés désirées.

Proposition 11. *Si $f(x)$, interne sur (a, b), est symétriquement continue au point $\xi \in (a, b)$, alors $f(x)$ est continue au point ξ.*

En effet, on a

$$\min(f(x), f(2\xi-x)) \leqq f(\xi) \leqq \max(f(x), f(2\xi-x))$$

et

$$\lim_{x\to\xi}(f(2\xi-x)-f(x))=0,$$

donc

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi).$$

Corollaire. *Une fonction interne et non monotone n'est symétriquement continue en aucun point.*

6. La „quasi-analyticité" des fonctions internes, non monotones.

Théorème 7. *Soit $f(x)$ une fonction jouissant de la propriété de Darboux, interne et non monotone sur (a, b). Soit $g(x)$ une fonction strictement interne sur (a, b). S'il existe un sous-intervalle $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, tel que $f(x)=g(x)$ pour chaque $x \in (\alpha, \beta)$, on a $f(x) \equiv g(x)$ sur (a, b).*

Démonstration. Soit $\xi \in (a, b)-(\alpha, \beta)$. Supposons, pour fixer les idées, que $\beta<\xi<b$. Du fait que, en vertu du théorème 1, $f(x)$ a sur chaque intervalle partiel de (a, b) les mêmes bornes m_f et M_f que sur (a, b), du corollaire 2 du théorème 1 et de ce que $f(x)$ jouit de la propriété de Darboux, il s'ensuit que $f(x)$ prend, sur chaque intervalle partiel de (a, b), toute valeur comprise entre m_f et M_f. Il existe donc un $\eta \in (\alpha, \beta)$ tel que $f(\eta)=f(\xi)$. Il est aisé de voir, par induction complète, que pour chaque n entier positif on a

$$f\left(\frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right)=f(\xi).$$

Mais pour n assez grand

$$\alpha<\frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}<\beta,$$

donc

$$g\left(\frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right)=f\left(\frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right)$$

et, comme $g(x)$ est strictement interne sur (a, b), il résulte que $g(x)$ est constante sur l'ensemble (voir la notation introduite au commencement de cet article)

$$M\left(\eta, \frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right).$$

Mais

$$\xi \in M\left(\eta, \frac{(2^n-1)\eta+\xi}{2^n}\right)$$

donc $g(\xi)=g(\eta)$ et, d'ici, $g(\xi)=f(\xi)$.

Remarque. Pour que le théorème 10 ne soit pas dépourvu d'objet, il faut montrer qu'il existe une fonction interne, non monotone, jouissant de la propriété de Darboux. Une fonction de ce type, qui est, en outre, strictement interne, se trouve en [16]. Mais il existe aussi des fonctions internes, non monotones, jouissant de la propriété de Darboux et qui ne sont pas strictement internes. Telle est la fonction de l'exemple 1 du § 4, dès que $\psi(u)$ est continue et $\varphi(x)$ a le graphique connexe (l'existence d'une fonction de Hamel à graphique connexe a été démontré dans [13]).

7. Les fonctions strictement internes de poids p, q.

Définition. Soient deux nombres réels p et q tels que $p>0$, $q>0$, $p+q=1$. Nous dirons que la fonction $f(x)$, définie sur (a, b), est, sur (a, b), strictement interne de poids p et q si pour $a<x<y<b$ on a soit

$$\min(f(x), f(y))=f(px+qy)=\max(f(x), f(y)),$$

soit

$$\min(f(x), f(y))<f(px+qy)<\max(f(x), f(y)).$$

Une fonction interne au sens de Á. Császár est donc strictement interne de poids $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Soit $f(x)$ une fonction strictement interne de poids p, q sur (a, b). Soient α et β tels que $a<\alpha<\beta<b$. Nous allons définir, par récurrence, une suite d'ensembles finis $\mathfrak{M}_n(\alpha, \beta, p, q)$ $(n=0, 1, \ldots)$. Pour $n=0$ posons

$$\mathfrak{M}_0(\alpha, \beta, p, q)=\{\alpha, \beta\}.$$

Supposons qu'on a défini déjà l'ensemble $\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha, \beta, p, q) \subset (a, b)$, soit

$$\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha, \beta, p, q)=\{\lambda_1^{n-1}, \ldots, \lambda_i^{n-1}, \ldots, \lambda_{s_n}^{n-1}\},$$

où $\lambda_i^{n-1}<\lambda_j^{n-1}$ pour $i<j$. Posons alors

$$\mathfrak{M}_n'(\alpha, \beta, p, q)=\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha, \beta, p, q) \cup \{p\lambda_i^{n-1}+q\lambda_{i+1}^{n-1}\} \quad (i=1, 2, \ldots, s_n-1),$$

et

$$\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)=\left\{\frac{1}{p}(\lambda_1^{n-1}-q\lambda_k^{n-1})\right\}\cup\left\{\frac{1}{q}(\lambda_{s_n}^{n-1}-p\lambda_m^{n-1})\right\}\cup\mathfrak{M}'_n(\alpha,\beta,p,q),$$

où les indices k et m sont le plus grand resp. le plus petit possible pour que les points correspondants soient encore situés en (a,b).

On a évidemment

$$\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha,\beta,p,q)\subset\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Posons

$$\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q).$$

Remarque. *L'ensemble $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$ est partout dense sur (a,b).*

Nous allons essayer de transposer pour les fonctions strictement internes de poids p,q, la suite des idées de [6], [7] et [16].

Proposition 13. *Soit $f(x)$ strictement interne, de poids p,q sur (a,b) $(p>0, q>0, p+q=1)$. Soit $a<\alpha<\beta<b$. En ce cas, $f(x)$ est constante, strictement croissante ou décroissante sur l'ensemble $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$, suivant que $f(\alpha)=f(\beta)$, $f(\alpha)<f(\beta)$ ou $f(\alpha)>f(\beta)$.*

Démonstration. Supposons que $f(\alpha)<f(\beta)$. $f(x)$ est donc croissante sur $\mathfrak{M}_0(\alpha,\beta,p,q)$. Admettons que $f(x)$ est croissante sur l'ensemble $\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha,\beta,p,q)$. On a donc

$$f(\lambda_1^{n-1})<f(\lambda_2^{n-1})<\cdots<f(\lambda_i^{n-1})<\cdots<f(\lambda_{s_n}^{n-1}).$$

En tenant compte de ce que $f(x)$ est strictement interne, de poids p,q, on en déduit

$$f\left(\frac{\lambda_1^{n-1}-q\lambda_k^{n-1}}{p}\right)<f(\lambda_1^{n-1})<f(p\lambda_1^{n-1}+q\lambda_2^{n-1})<f(\lambda_2^{n-1})<\cdots<f(\lambda_i^{n-1})<$$
$$<f(p\lambda_i^{n-1}+q\lambda_{i+1}^{n-1})<f(\lambda_{i+1}^{n-1})<\cdots<f(\lambda_{s_n}^{n-1})<f\left(\frac{\lambda_{s_n}^{n-1}-p\lambda_m^{n-1}}{q}\right),$$

donc $f(x)$ est croissante sur $\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)$, quel que soit l'entier positif n. Soient maintenant $x_1<x_2$, $x_1\in\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$, $x_2\in\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$. De la définition même de l'ensemble $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$ il résulte l'existence d'un entier positif n, tel que $x_1\in\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)$, $x_2\in\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)$ donc $f(x_1)<f(x_2)$ et $f(x)$ est croissante sur $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$.

Si $f(\alpha)>f(\beta)$, on prouve, par une voie analogue, que $f(x)$ est décroissante sur $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$.

Si $f(\alpha)=f(\beta)$, alors, en admettant que $f(x)$ est constante sur $\mathfrak{M}_{n-1}(\alpha,\beta,p,q)$, on déduit aisément que $f(x)$ est constante sur $\mathfrak{M}_n(\alpha,\beta,p,q)$ et, donc, que $f(x)$ est constante sur $\mathfrak{M}(\alpha,\beta,p,q)$.

Proposition 14. *Si $f(x)$ est strictement interne, de poids p, q sur (a, b) $(p>0, q>0, p+q=1)$, constante, resp. croissante, resp. décroissante sur un sous-intervalle de (a, b), alors elle est constante, resp. croissante, resp. décroissante sur (a, b).*

Démonstration. En vertu de la proposition 13, la démonstration se fait de la même manière que pour le lemme 2 de [6].

Proposition 15. *Soit $f(x)$ strictement interne, de poids p, q sur (a, b) $(p>0, q>0, p+q=1)$. Soit $a<\alpha<b$. Si pour un certain $\delta>0$ on a $f(\alpha)\leqq f(\alpha+h)$ $(0<h<\delta)$, alors $f(x)$ est croissante sur (a, b) ou constante sur (a, b).*

Démonstration. En essence, le raisonnement ne diffère pas de celui utilisé dans la démonstration du lemme 3 de [6].

En vertu de la proposition 14, il suffit de montrer que $f(x)$ est croissante ou constante sur un sous-intervalle de $(\alpha, \alpha+\delta)$. En effet, dans le cas contraire il existerait des ξ et η tels que $\alpha<\xi<\eta<\alpha+\delta$ et que $f(\xi)>f(\eta)\geqq f(\alpha)$.

D'après la proposition 13, $f(x)$ est décroissante sur l'ensemble $(a, b)\cap \cap \mathfrak{M}(\xi, \eta, p, q)$; il existe donc sur l'intervalle

$$\left(\alpha-\frac{q}{p}\delta, \alpha\right),$$

comme conséquence de ce que l'ensemble $\mathfrak{M}(\xi, \eta, p, q)$ est dense, un point y tel que $f(y)>f(\xi)\geqq f(\alpha)$. Mais, pour tel y, le point

$$z=\frac{\alpha-py}{q}$$

se trouve sur l'intervalle $(\alpha, \alpha+\delta)$ et $f(z)<f(\alpha)$, en contradiction avec l'hypothèse.

Proposition 16. *Si $f(x)$ est strictement interne, de poids p, q sur (a, b) $(p>0, q>0, p+q=1)$, non monotone sur (a, b), et si $a<\alpha<b$, alors les ensembles $\{x; f(x)>f(\alpha)\}$ et $\{x; f(x)<f(\alpha)\}$ sont partout denses sur (a, b).*

Démonstration. On procède comme au lemme 4 de [6],

Proposition 17. *Soit $f(x)$ une fonction strictement interne, de poids p, q $(p>0, q>0, p+q=1)$, non monotone sur (a, b). Soient α et β tels que*

$$a<\alpha<\beta<\frac{\beta-p\alpha}{q}<b.$$

Dans ces conditions, la mesure intérieure de l'ensemble

$$\{x; \alpha<x<\beta, \min(f(\alpha), f(\beta))<f(x)<\max(f(\alpha), f(\beta))\}$$

est égale à zéro.

D é m o n s t r a t i o n. On imite la première partie de la démonstration du lemme de [7], avec les deux modifications suivantes:

1. E_3, au lieu d'être l'ensemble symétrique de E_2 par rapport à β, est l'ensemble qui se déduit de E_2 de la manière suivante:

Si $x \in E_2$, alors $\frac{\beta - px}{q} \in E_3$;

2. E_4'', au lieu d'être l'ensemble symétrique de E_3 par rapport au point β_n, se déduit de E_3 de la manière suivante:

Si $x \in E_3$, alors $\frac{\beta_n - qx}{p} \in E_4''$.

P r o p o s i t i o n 18. *Dans les hypothèses et avec les notations de la proposition 17, tout ensemble jouissant de la propriété de Baire contenu dans l'ensemble*

$$\{x;\ \alpha < x < \beta,\ \min(f(\alpha), f(\beta)) < f(x) < \max(f(\alpha), f(\beta))\}$$

est de première catégorie.

D é m o n s t r a t i o n. On imite la démonstration du lemme de [16] avec les modifications indiquées dans la démonstration de la proposition 17.

T h é o r è m e 8. *Une fonction strictement interne de poids p, q ($p > 0$, $q > 0, p + q = 1$), non monotone sur (a, b), n'est mesurable sur aucun ensemble de mesure positive de (a, b).*

D é m o n s t r a t i o n. On imite la démonstration du théorème de [7] en remarquant que l'intervalle (α_1, β_1) peut être choisi assez petit pour qu'on ait

$$\frac{\beta_1 - p\alpha_1}{q} < b,$$

donc on peut faire usage de la proposition 17 ci-dessus.

T h é o r è m e 9. *Une fonction strictement interne de poids p, q ($p > 0$, $q > 0, p + q = 1$), non monotone sur (a, b), est dépourvue de la propriété de Baire par rapport à tout ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire.*

D é m o n s t r a t i o n. On imite la démonstration du théorème 3 de [6] en tenant compte de la remarque faite dans la démonstration du théorème 8. On utilise la proposition 18.

Des propositions 17 et 18 on peut déduire, de la même manière comme on a déduit le théorème 3 du théorème 2, le

T h é o r è m e 10. *Une fonction strictement interne de poids p, q ($p > 0$, $q > 0, p + q = 1$), non monotone sur (a, b), ne possède sur (a, b) aucun point de continuité approximative ou qualitative.*

8. Applications à certaines équations fonctionnelles.

Dans ce paragraphe nous nous proposons de donner quelques exemples d'équations fonctionnelles souvent rencontrées dans la littérature, dont les solutions sont des fonctions internes et donc leur étude profite des résultats établis jusqu'ici.

Considérons l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=G[f(x),f(y)]. \tag{1}$$

On sait (théorème 2 de [1], [4]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) ait une solution continue et strictement monotone est que la fonction $G(t,u)$ soit continue, strictement croissante par rapport à chacune de ses variables prise à part, et qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$G[G(s,t),u]=G[s,G(t,u)].$$

Soit $G(t,u)$ telle que toute solution de (1) soit strictement interne et convexe. Compte tenu du théorème de [7], du théorème 3 de [16] et du théorème 1 de [18], on déduit que *les conditions imposées dans* [1] *par* J. Aczél *à la fonction* $G(t,u)$ *sont nécessaires et suffisantes pour que* (1) *admette une solution non constante approximativement ou qualitativement continue en un point.* (Ou une solution mesurable par rapport à un ensemble de mesure positive et jouissant de la propriété de Baire par rapport à un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire.)

Considérons l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=G[f(x),f(y)]. \tag{2}$$

On sait [21] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (2) admette une solution continue et strictement croissante est que $G(t,u)$ soit continue, croissante par rapport à chacune de ses variables prise à part et qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

$$G[G(s,t),u]=G[G(s,u),G(u,t)].$$

Soit $G(t,u)$ telle que toute solution de (2) soit strictement interne et convexe. En tenant compte du théorème de [7], du théorème 3 de [16] et du théorème 1 de [18], on déduit que *les conditions imposées dans* [21] *par* Ryll-Nardzewsky *à la fonction* $G(t,u)$ *sont nécessaires et suffisantes pour que* (2) *admette une solution non constante mesurable sur un ensemble de mesure positive ou une solution jouissant de la propriété de Baire par rapport à un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire.*

Un exemple d'équation du type (2), dont les solutions sont des fonctions strictement internes et convexes, est donné par l'équation fonctionnelle de LOBATSCHEWSKY [15]:

$$(3) \qquad (f(x))^2 = f(x+y) \cdot f(x-y).$$

En effet, toute solution est évidemment soit >0, soit $=0$, soit <0 partout. En supposant que $f(x)>0$ et, en posant $u=x+y$, $v=x-y$, on obtient

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \sqrt{f(u) \cdot f(v)},$$

donc $f(x)$ est strictement interne, et puisque

$$\sqrt{f(u) \cdot f(v)} \leqq \frac{f(u)+f(v)}{2}$$

on déduit que $f(x)$ est convexe au sens de JENSEN.

Les seules solutions continues et strictement monotones de l'équation de LOBATSCHEWSKY étant celles de la forme ac^x, il résulte que toute solution de (3), approximativement ou qualitativement continue en un point est de la forme ac^x.

J. L. W. JENSEN a considéré l'équation fonctionnelle [12]:

$$(4) \qquad f(px+qy) = pf(x) + qf(y) \qquad (p>0, q>0, p+q=1).$$

Toute solution de (4) est, visiblement, une fonction strictement interne de poids p, q. Compte tenu des théorèmes 8 et 9 du présent ouvrage, on déduit que *toute solution de* (4), *mesurable sur un ensemble de mesure positive, ou jouissant de la propriété de Baire par rapport à un ensemble de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire, est une fonction monotone.*

On sait que la continuité d'une solution de (4) dans un point entraîne la continuité de cette solution dans chaque point. On sait aussi que toute solution continue de (4) est de la forme $ax+b$. En vertu des résultats obtenus jusqu'ici et du fait que toute fonction monotone admet des points de continuité, on déduit que *toute solution de* (4) *qui admet un point de continuité approximative ou qualitative est de la forme* $ax+b$.

Nous allons donner maintenant une généralisation de la proposition que nous venons d'énoncer.

J. ACZÉL a étudié [2] les solutions continues dans un point des équations fonctionnelles de la forme

$$(5) \qquad f(\alpha x + \beta y) = pf(x) + qf(y).$$

Il a montré ([2], p. 249) que l'équation (5) admet une solution non constante, continue dans un point, si et seulement si $\alpha = p$, $\beta = q$ et que l'équation (5) admet une solution constante, non nulle, si et seulement si $p+q=1$.

A l'aide des théorèmes 8 et 9 de cet ouvrage on peut déterminer les solutions mesurables et celles jouissant de la propriété de Baire de certaines équations fonctionnelles du type (5). En effet, remarquons que pour $\alpha+\beta=$ $=p+q=1, \alpha>0, \beta>0, p>0, q>0,$ toute solution de (5) est une fonction interne de poids α, β. En tenant compte de ce que toute fonction monotone admet des points de continuité et que, en vertu d'un théorème de J. Aczél ([2], p. 249), toute solution de (5), continue dans un point, est de la forme $ax+b$, il résulte, en utilisant le théorème 10, que *pour* $\alpha>0, \beta>0, p>0, q>0,$ $\alpha+\beta=p+q=1$, *toute solution de* (5) *qui admet un point de continuité approximative ou qualitative est de la forme* $ax+b$.

Un résultat de Z. Waraskiewicz [25] nous attiré a l'attention sur l'équation fonctionnelle

$$(6) \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \qquad (0<\lambda<1).$$

Z. Waraskiewicz affirme [25] que pour $\lambda \neq \frac{1}{2}$ cette équation n'admet aucune solution dérivable et non constante.

Mais l'équation (6) est un cas particulier de (5), donc, en vertu du résultat ci-dessus, il n'existe aucune solution non constante de (6), approximativement continue dans un point, si $\lambda \neq \frac{1}{2}$. On a ainsi un résultat plus précis que celui de Z. Waraskiewicz.

La remarque faite par Z. Waraskiewicz en [25] sur l'exemple de fonctions continues dépourvues de dérivée, fourni par l'équation (6) dans le cas $\lambda \neq \frac{1}{2}$, est donc sans objet. Mais on peut aller plus loin et montrer que *l'équation* (6) *est dépourvue de solution non constante, si* $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Ce fait nous a été communiqué par M. I. Berstein. Voici sa démonstration:

Supposons qu'il existe une solution non constante $f(x)$ de (6). Il existe donc deux valeurs x et y, telles que, en posant $f(x)=a$, $f(y)=b$, on ait $a\neq b$. On a aussi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lambda a+(1-\lambda)b.$$

Désignons par x_1 et y_1 les milieux des intervalles

$$\left(x, \frac{x+y}{2}\right), \quad \left(\frac{x+y}{2}, y\right).$$

On a

$$f(x_1)=\lambda a+(1-\lambda)[\lambda a+(1-\lambda)b], \quad f(y_1)=\lambda[\lambda a+(1-\lambda)b]+(1-\lambda)b,$$

donc

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lambda^2 a+\lambda(1-\lambda)[\lambda a+(1-\lambda)b]+\lambda(1-\lambda)[\lambda a+(1-\lambda)b]+$$
$$+(1-\lambda)^2 b=[\lambda^2+2\lambda^2(1-\lambda)]a+[2\lambda(1-\lambda)^2+(1-\lambda)^2]b$$

d'où il s'ensuit que

$$\lambda a+(1-\lambda)b=\lambda^2(3-2\lambda)a+(2\lambda+1)(1-\lambda)^2 b.$$

Cette équation en λ a les seules solutions $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=\frac{1}{2}$. Comme par définition on a $0<\lambda<1$, il résulte que l'équation (6) est dépourvue de solution non constante, pour $\lambda\neq\frac{1}{2}$.

Ouvrages cités.

[1] Я. Ацель, Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений, Успехи Матем. Наук, **IX**:**3** (1956), 3—68.

[2] J. Aczél, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Commentarii Math. Helvetici*, **21** (1948), 247—256.

[3] C. Burstin, Die Spaltung des Kontinuums in c im L. Sinne nichtmeßbare Mengen, *Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Math. Nat. Kl. Abt. IIa*, **125** (1916).

[4] R. Caccioppoli, L'equazione funzionale $f(x+y)=F[f(x),f(y)]$, *Giornale di Mat.*, **66** (1928), 69—74.

[5] Z. Charzynski, Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout finie, *Fundamenta Math.*, **21** (1933), 214—226.

[6] Á. Császár, Sur une classe de fonctions non mesurables, *Fundamenta Math.*, **36** (1949), 72—76.

[7] Á. Császár, Sur les fonctions internes non monotones, *Acta Sci. Math.*, **13** (1949), 48—50.

[8] H. Fried, Über die symmetrische Stetigkeit von Funktionen, *Fundamenta Math.*, **29** (1937), 134—137.

[9] P. Halmos, *Measure Theory* (New-York, 1951).

[10] I. Halperin, Non-finite Solutions of the Equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 1063 (abstract).

[11] M. Hukuhara, Sur la fonction convexe, *Proc. Japan Acad.*, **30** (1954), 683—685.

[12] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30** (1906), 179—193.

[13] F. B. Jones, Connected and disconnected plane sets and the functional equation, $f(x+y)=f(x)+f(y)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 115—120.

[14] C. Kuratowski, *Topologie* I (Warszawa—Wrocław, 1948).

[15] N. I. Lobatschewsky, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Berlin, 1840), §§ 33, 36.

[16] S. Marcus, Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel, *Rendiconti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis. mat. nat.*, **20** (1956), 584—589.

[17] S. Marcus, Contribuţii la o analiză a funcţiilor reale bazată pe noţiunea de categorie (în sensul lui Baire), *Studii şi Cercetări Matem.*, **7** (1956), 251—272.

[18] S. Marcus, Fonctions convexes et fonctions internes, *Bulletin Sci. Math. Paris*, **81** (1957), 66—70.

[19] S. Marcus, Un critère de finitude pour les fonctions sousadditives, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **244** (1957), 2221—2222.

[20] S. Marcus, Critères de majoration pour les fonctions sousadditives, convexes ou internes, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **244** (1957), 2270—2272 et 3195.

[21] C. Ryll-Nardzewski, Sur les moyennes, *Studia Math.*, **11** (1949), 31—37.

[22] A. Ostrowski, Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, **38** (1929), 54—62.

[23] S. Piccard, *Sur les ensembles parfaits* (Paris, 1942).

[24] H. Steinhaus, Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, *Fundamenta Math.*, **1** (1920), 93—104.

[25] Z. Waraskiewicz, Sur les fonctions définies par les équations fonctionnelles $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2f(x)f(y)/(f(x)+f(y))$ et $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ où $0 \leqq \lambda \leqq 1$. *Comptes Rendus Soc. Polonaise de Math., Cracovie*, **41** (1947). 237.

(Reçu le 27 mars 1958.)

On complete semi-modules.

By RICHARD WIEGANDT in Orosháza (Hungary).

§ 1.

An algebraic structure is called a semi-module if it is an additive commutative regular semi-group. In this paper we assume that the considered semi-modules contain a zero-element.

RÉDEI [4] has defined the left-normal semi-modules similarly as the left-normal semi-groups. A sub-semi-module N of the semi-module S is called left-normal, if a compatible classification of S has the form

$$a_1+N, a_2+N, \dots \qquad (a_1=0).$$

Since S is commutative, so every left-normal semi-module is at the same time right-normal too. Thus every left normal semi-module is a normal semi-module. Contrary to the case of modules, a sub-semi-module of a semi-module is not always normal. Consider for example the semi-module of the non-negative integers and a fixed integer $k(>0)$. The integers $n(\geqq k)$ form a semi-module, but this is not normal in the semi-module of the non-negative integers.

In a previous paper (WIEGANDT [6]) we have defined the complete structures. In this way a semi-module S is called complete, when it is a direct component of every semi-module which contains S as a normal semi-module.

In this paper we characterize the complete semi-modules, further we shall give all of the complete semi-modules, and we shall show that every semi-module is a sub-semi-module of a complete semi-module.

§ 2.

Theorem 1. *A semi-module S (with zero-element) is complete if, and only if, $nS=S$ for every natural number n.*

Remark. For comparison we mention that the complete abelian groups can be characterized by a similar condition, namely an abelian group A is complete (i. e. A is a direct component of every containing abelian group) if, and only if, $nA = A$ for every natural number n (see BAER [1]). By Theorem 1 the complete abelian groups are direct components of every containing semi-module too.

Proof. The condition $nS = S$ means that every equation

$$nx = \sigma \qquad (\sigma \in S, n > 0 \text{ integer}) \tag{1}$$

has a solution in S.

Assume that S is a complete semi-module. Let n be an arbitrary natural number and σ an arbitrary element of S. Consider the set of the pairs (k, μ) $(0 \leqq k \leqq n-1, \mu \in S)$, and define the addition in this set as follows:

$$(k, \mu) + (l, \nu) = \left(\overline{k+l}, \left[\frac{k+l}{n}\right] \sigma + \mu + \nu\right) \tag{2}$$

where $\overline{k+l}$ means the least non-negative representant of the residue class ring mod n, $[a]$ means — as usual — "entier a". Denote this structure by $\bar{S}$. Clearly, the addition (2) is commutative, further according to the regularity of S the addition (2) is regular too. It is easy to see that for every integer k, l, m $(0 \leqq k, l, m \leqq n-1)$ we have

$$\left[\frac{k + \overline{l+m}}{n}\right] + \left[\frac{l+m}{n}\right] = \left[\frac{\overline{k+l} + m}{n}\right] + \left[\frac{k+l}{n}\right].$$

This implies that the function $k^l = \left[\frac{k+l}{n}\right] \sigma$ fulfills the condition (15′) of RÉDEI [4]. Further we have $\left[\frac{k+0}{n}\right] \sigma = \left[\frac{0+k}{n}\right] \sigma = 0$ and so the function $k^l = \left[\frac{k+l}{n}\right] \sigma$ fulfills also the condition (12) of RÉDEI [4]. Thus by Corollary 2 of RÉDEI [4] $\bar{S}$ is an endomorphism-free Schreierian extension, namely by (2) an extension of S by the cyclic group of order n. So $\bar{S}$ is a semi-module, and the elements $(0, \tau)$ $(\tau \in S)$ form a normal semi-module in $\bar{S}$, which is isomorphic to S. Embed S into $\bar{S}$ and denote the element $(1, 0)$ by x. Since

$$n(1, 0) = \left(\bar{n}, \left[\frac{n}{n}\right] \sigma\right) = (0, \sigma) \tag{3}$$

so x is a solution of the equation (1). Since S is normal in $\bar{S}$, therefore by the hypothesis S is a direct summand of $\bar{S}$,

$$\bar{S} = S + K.$$

Hence, the element x may be represented in one and only one way in the form

$$x = \eta + \varkappa \qquad (\eta \in S, \varkappa \in K)$$

and so

(4) $$nx = n\eta + n\varkappa.$$

On the other hand we have according to (3)

(5) $$nx = \sigma \in S.$$

Since $\bar{S}$ is a direct sum, so (4) and (5) implies $n\varkappa = 0$ and $nx = n\eta$. So $\eta (\in S)$ is a solution of the equation (1). Thus we have proved the necessity of the condition.

Conversely, assume that $nS = S$ is valid for every natural number n. Let T be an arbitrary semi-module which contains S as a normal semi-module. We show that S is a direct component of T.

Let S^* be the difference module of S in the sense of RÉDEI [5] Theorem 70. The elements of S^* are of the form $\sigma_1 - \sigma_2$ $(\sigma_1, \sigma_2 \in S)$. Let ξ_i $(i = 1, 2)$ be a solution of the equations

$$n\xi_i = \sigma_i \qquad (\sigma_i \in S, n > 0 \text{ integer})$$

in S. Since $\xi = \xi_1 - \xi_2 (\in S^*)$ is a solution of the equation

$$n\xi = \sigma_1 - \sigma_2$$

therefore we get $nS^* = S^*$ for S^*. Hence S^* is a complete abelian group. Embed S^* into the difference modul T^* of T. Since S^* is a complete abelian group, so S^* is a direct summand of T^*

$$T^* = S^* + D^*.$$

Thus the elements of $T (\subseteqq T^*)$ have the form $\varrho^* + \delta^*$ $(\varrho^* \in S^*, \delta^* \in D^*)$. Let ϱ^* be an arbitrary element which holds $\varrho^* = \varrho_1 - \varrho_2 \in T$ $(\varrho_1, \varrho_2 \in S)$ Obviously, in the classification of T according to S we have

$$\varrho_1 + S \subset \varrho_1 - \varrho_2 + S$$
$$\varrho_1 + S \subseteqq S$$

So the elements of S and of $\varrho_1 - \varrho_2 + S$ are in the same class and this class is exactly S. This implies $\varrho^* = \varrho_1 - \varrho_2 \in S$. Hence the elements of T can be represented in one and only one way in the form $\varrho + \delta^*$ $(\varrho \in S, \delta^* \in D^*)$, and this proves that S is a direct component of T.

To formulate our next theorem, we introduce the following terminology. By a group of type R we mean a group isomorphic to the additive group of all rational numbers, similarly by a semi-module of type N we mean a semi-module isomorphic to the additive group of all non-negative rationals. The complete semi-modules are completely described by

Theorem 2. *Every complete semi-module can be decomposed uniquely into the direct sum of groups of type R, semi-modules of type N and Prüfer's groups of type p^∞.*

Proof. Let S be an arbitrary complete semi-module. In S the elements which have an inverse, form an abelian group A.

Let a be an arbitrary element of A, and ξ_a any solution of the equation $n\xi = a$. Thus we have

$$n\xi_a - (n\xi_a) = 0,$$

and so

$$\xi_a + ((n-1)\xi_a - (n\xi_a)) = 0.$$

Hence ξ_a has an inverse, and by the construction of A we get $\xi_a \in A$. Thus A is an complete abelian group. Obviously A is normal in S. Hence A is a direct summand of S,

$$S = A + B.$$

Since A is a complete abelian group, so by a well-known theorem A is the direct sum of groups of type R and of type p^∞ (e. g. see KUROSH [3]). Clearly, B is a complete semi-module, and by the construction of A, the elements of B have not any inverse except the zero-element. This implies that the elements of B are of infinite order. We show that B can be decomposed uniquely into the direct sum of semi-modules of type N. The difference module B^* of B is a complete abelian group with elements of infinite order. Hence B^* can be decomposed uniquely into the direct sum of groups of type R. Thus B is also a direct sum, and each of its components is contained in a group of type R, further their components are obviously complete semi-modules by Theorem 1. We prove that their components are semi-modules of type N. It is sufficient to prove that, if a complete semi-module B_0 is contained in the module of the rational numbers, further if in B_0 only the zero-element has an inverse, then one of the following three cases occurs:

i) $B_0 = 0$,

ii) B_0 is the semi-module of the rationals $\geqq 0$,

iii) B_0 is the semi-module of the rationals $\leqq 0$.

Let $b\,(\neq 0)$ be an arbitrary element of B_0. We may suppose that b is an integer. At first we discuss the case $b > 0$. Since B_0 is a complete semi-module, so by Theorem 1 the equation $bx = b$ has a solution in B_0. Hence we get $x = 1 \in B_0$. Since $\frac{1}{n!}$ is the solution of the equation $n!\,x = 1$, so we have $\frac{1}{n!} \in B_0$. The numbers $0, 1, \frac{1}{2!}, \dots \frac{1}{n!}, \dots$ generate the semi-module of the non-negative rationals which is contained in B_0. B_0 does not contain negative rational numbers, because otherwise its inverse would be contained in B_0. Thus B_0 coincides with the semi-module of the non-negative rationals.

In the case $b<0$, we get on the same way the semi-module of the rationals $\leqq 0$, which is clearly a semi-module of type N.

Thus Theorem 2 is proved.

§ 3.

Concerning the embedding of a semi-module into a complete semi-module we have the following

Theorem 3. *Every semi-module can be embedded into a complete semi-module. In a complete semi-module which contains the semi-module S, there exists a smallest complete semi-module containing S, and this is uniquely determined up to isomorphism.*

Since the difference module of S can be embedded into a complete abelian group (see KULIKOV [2]), so the first statement is proved.

The proof of the further statements agree with the proof of the analogous theorem for abelian groups (see KUROSH [3]).

Bibliography.

[1] R. BAER, Abelian groups that are direct summands of every containing abelian groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 800—806.

[2] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. сборник, **16** (1945), 129—162.

[3] А. Г. Курош, Теория групп (Moscow, 1953), 151—156.

[4] L. RÉDEI, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math.*, **14** (1952), 252—273.

[5] L. RÉDEI, *Algebra* (Budapest, 1955), 154—156.

[6] R. WIEGANDT, On complete semi-groups, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 93—97.

(Received March 10, 1958.)

Note on complemented modular lattices of finite length.

By G. SZÁSZ in Szeged.

1. Introduction.

It is known, by a theorem of DEDEKIND ([1], p. 66, Theorem 2) and of BIRKHOFF ([1], p. 134, Theorem 2), respectively, that

(A) any non-modular lattice contains a sublattice isomorphic to the lattice of Fig. 1;

(B) any non-distributive modular lattice contains a sublattice isomorphic to the lattice of Fig. 2.

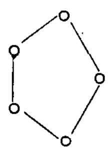

Fig. 1.

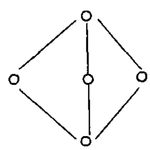

Fig. 2.

For complemented lattices of finite length the assertion (A) may be strengthened, by a theorem of DILWORTH ([2], p. 21), as follows:

(C) Any complemented non-modular lattice L of finite length contains a sublattice which includes the bounds[1]) of L and is isomorphic to the lattice of Fig. 1.

However, the assertion which may be analogously obtained from (B), is not true in general: there exist complemented non-distributive modular lattices L of finite length in which no sublattice isomorphic to the lattice of Fig. 2 includes the bounds of L. (Consider, for example, the lattice formed by the linear subspaces of the projective plane.) Accordingly, the problem arises to find necessary and sufficient conditions in order that such a lattice

[1]) By the *bounds* of a lattice we mean its least and greatest element (if existing). The least and the greatest element of a lattice (if existing) will be mostly denoted by o and i, respectively, but occasionally these letters will be supplied by subscripts.

L have a sublattice which is isomorphic to the lattice of Fig. 2 and at the same time includes the bounds of L. Our theorem in section 3 gives a solution of this problem; section 2 contains some preliminary lemmas.

2. Lemmas.

In this section we enumerate some results which either are known or may be easily obtained from known theorems.

In what follows, the height of an element x of a lattice of finite length will be denoted by $d(x)$. Then we have

Lemma 1. *Let L be a modular lattice of finite length. Then*

$$d(a \cap b) + d(a \cup b) = d(a) + d(b)$$

for each pair a, b of elements in L.

For the proof of this Lemma see [1], p. 67.

Lemma 2. *Let $\{p_1, \ldots, p_m\}$ be any set of points of a modular lattice of finite length. Then $d(p_1 \cup \cdots \cup p_m) \leqq m$.*

The assertion of this Lemma follows from Lemma 1 by induction.

Lemma 3. *Let L be a complemented modular lattice of length m. Then there exists a set $\{p_1, \ldots, p_m\}$ of points of L such that $\bigcup_{j=1}^{m} p_j = i$.*

Proof. By Theorem 6 on p. 105 of [1], the greatest element i of L may be represented as the join of points. Let P denote a set of points whose join is equal to i; from P we shall select, by induction, a subset of m elements with the required properties.

First we choose an arbitrary element p_1 of P. Then, if $p_1, \ldots, p_{j-1}$ are already selected, we single out an element p_j of P such that $(p_1 \cup \cdots \cup p_{j-1}) \cap p_j = o$. We continue this process until it is possible. Thus we get a subset $\bar{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}, p_j, \ldots\}$ consisting of different points such that[2])

$$(p_1 \cup \cdots \cup p_{j-1}) \cap p_j \prec p_j \qquad (j = 2, 3, \ldots).$$

It follows, by the covering conditions, that

$$o \prec p_1 \prec \cdots \prec p_1 \cup \cdots \cup p_{j-1} \prec p_1 \cup \cdots \cup p_j \prec \cdots.$$

Since the length of L is m, this implies that if n denotes the number of elements of $\bar{P}$, then $n \leqq m$.

---

[2]) By $x \prec y$ me mean that x is covered by y.

On the other hand, $n \geqq m$. Indeed, if $\bar{P}=\{p_1, \ldots, p_n\}$ and p is any element of P different from the elements p_j $(j=1, \ldots, n)$, then, by the construction of $\bar{P}$, $p \frown (p_1 \smile \cdots \smile p_n) = p$ which is equivalent to $p \smile (p_1 \smile \cdots$ $\cdots \smile p_n) = p_1 \smile \cdots \smile p_n$. Hence

$$i = \bigcup_{p \in P} p = \bigcup_{j=1}^{n} p_j.$$

Consequently, by Lemma 2, $m = d(i) = d(p_1 \smile \cdots \smile p_n) \leqq n$, completing the proof.

A lattice is called *simple* if it has no non-trivial congruence relations. For simple modular lattices we have the following

Lemma 4. *Let L be a simple complemented modular lattice of finite length. Then to each pair p, q $(p \neq q)$ of its points there exists a third point r $(\neq p, q)$ which satisfies the equations $p \smile q = q \smile r = r \smile p$.*

Proof. It is known ([3], p. 89) that if a complemented modular lattice L of finite length is simple, then to each pair p, q $(p \neq q)$ of its points there exists a third point r in L such that $r < p \smile q$. It follows at once $p < p \smile r \leqq p \smile q$;[3]) moreover, $p \neq q$ implies $p \frown q = o \prec q$, whence we get, by the covering conditions, that $p \prec p \smile q$. Hence $p \smile r = p \smile q$. Similarly, $q \smile r = p \smile q$.

3. The theorem.

It is known ([1], pp. 120—121) that any complemented modular lattice L of finite length may be uniquely represented as a direct union

(1) $$L = P_0 \times P_1 \times \cdots \times P_r \qquad (r \text{ finite}),$$

where P_0 is a Boolean algebra and $P_1, \ldots, P_r$ are simple complemented modular, but non-distributive lattices. Using this result, we prove the following

Theorem. *Let L be any complemented modular lattice of finite length. Then L contains a sublattice which includes the bounds of L and is isomorphic to the lattice of Fig. 2 if and only if in its direct decomposition of the form* (1) *the component P_0 is the one-element lattice and the length of each P_j $(j=1, \ldots, r)$ is even.*

Proof. We prove our theorem in the following, equivalent form: *In a complemented modular lattice L of finite length the equation system*

(2) $$u \frown v = v \frown z = z \frown u = o,$$

(3) $$u \smile v = v \smile z = z \smile u = i$$

---

[3]) Since p, r both are points and $p \neq r$, $p = p \smile r$ is impossible.

is satisfied by some elements $u, v, z\ (\in L)$ if and only if in the direct decomposition of the form (1) *of L the component P_0 consists of a single element and each P_j $(j=1,\dots,r)$ is of even length.*

Now, according to (1), any elements u, v, z of L may be represented as

$$\left.\begin{aligned} u&=(u_0,\ u_1,\dots,\ u_r)\\ v&=(v_0,\ v_1,\dots,\ v_r)\\ z&=(z_0,\ z_1,\dots,\ z_r)\end{aligned}\right\}\qquad (u_j, v_j, z_j\in P_j;\quad j=0,1,\dots,r).$$

Hence, if o_j and i_j denote the least and the greatest elements of P_j $(j=0,1,\dots,r)$, respectively, then the equation system (2)—(3) is equivalent to the following equation system concerning the components of the elements u, v, z:

$$\begin{aligned} &(4)\qquad & u_j\cap v_j=v_j\cap z_j=z_j\cap u_j=o_j\\ &(5)\qquad & u_j\cup v_j=v_j\cup z_j=z_j\cup u_j=i_j\end{aligned}\Bigg\}\qquad (j=0,1,\dots,r).$$

Proof of the necessity of the conditions. Let us assume that there exist elements u, v, z in L such that (2), (3) are satisfied. Then, as we have seen, the equations (4), (5) hold for the components of these elements.

Since P_0 is distributive, each element of P_0 has only one complement ([1], p. 134). This implies, with respect to (4) and (5), that at least two of the elements u_0, v_0, z_0 must be equal; by symmetry, we can assume $u_0=v_0$. It follows from (4) and (5) that

$$o_0=u_0\cap v_0=u_0\cap u_0=u_0=u_0\cup u_0=u_0\cup v_0=i_0.$$

Thus, P_0 consists actually of a single element.

Consider now the components P_j $(j=1,\dots,r)$. Each of these components is a modular lattice of finite length. Hence, by (4), (5) and by Lemma 1, we have

$$\left.\begin{aligned} d(u_j)+d(v_j)&=d(i_j)\\ d(v_j)+d(z_j)&=d(i_j)\\ d(z_j)+d(u_j)&=d(i_j)\end{aligned}\right\}\qquad (j=1,\dots,r).$$

By adding these equations we get

$$2(d(u_j)+d(v_j)+d(z_j))=3d(i_j)\qquad (j=1,\dots,r).$$

Thus we conclude that each $d(i_j)$ $(j=1,\dots,r)$ is divisible by 2, i. e. that the length of each P_j is even.

Proof of the sufficiency of the conditions. With regard to the equivalence of the two equation systems (2)—(3) and (4)—(5), respectively, it suffices to show that the following assertion is true: *In any simple complemented modular* *lattice P of even $(\neq 0)$ length there exist elements a, b, c which satisfy the equations*

$$a \cap b = b \cap c = c \cap a = o, \tag{6}$$

$$a \cup b = b \cup c = c \cup a = i. \tag{7}$$

In order to prove this assertion, let us consider a simple complemented modular lattice P with $d(i) = 2n$, where n denotes a positive integer. Then, by Lemma 3, there exists a set $\{p_1, \dots, p_{2n}\}$ of points of P such that

$$\bigcup_{j=1}^{2n} p_j = i \tag{8}$$

and, by Lemma 2, $p_j \neq p_k$ for $j \neq k$ $(j, k = 1, \dots, 2n)$. It follows, by Lemma 4, that to each pair p_j, p_{n+j} $(j = 1, \dots, n)$ there exists a point q_j in P such that $q_j \neq p_j, p_{n+j}$ and

$$p_j \cup p_{n+j} = p_j \cup q_j = p_{n+j} \cup q_j \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{9}$$

Now we define three elements a, b, c by

$$a = \bigcup_{j=1}^{n} p_j, \qquad b = \bigcup_{j=1}^{n} p_{n+j}, \qquad c = \bigcup_{j=1}^{n} q_j \tag{10}$$

and we show that these elements satisfy the equations (6), (7).

Firstly, by (10) and (8), $a \cup b = i$. Next, by (10) and (9), we get

$$a \cup c = \bigcup_{j=1}^{n} (p_j \cup q_j) = \bigcup_{j=1}^{n} (p_j \cup p_{n+j}) = a \cup b = i$$

and, in the same way, $b \cup c = i$. Thus (7) is already verified. Furthermore, by Lemmas 1 and 2, we obtain

$$d(a \cap b) = d(a) + d(b) - d(a \cup b) = d(a) + d(b) - d(i) \leqq n + n - 2n = 0$$

which is equivalent to $a \cap b = o$. Similarly, $b \cap c = c \cap a = o$. Thus our assertion is proved.

References.

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. 25, revised edition (New York, 1948).

[2] R. P. Dilworth, On complemented lattices, *Tôhoku Math. Journal*, 47 (1940), 18—23.

[3] H. Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie*, Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 73 (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955).

(Received March 5, 1958.)

Sur la stabilité conditionnelle par rapport aux perturbations permanentes.

Par C. CORDUNEANU à Jassy (Roumanie).

Dans un travail précédent [2], nous avons défini la notion de stabilité conditionnelle par rapport aux perturbations permanentes, en illustrant cette définition dans le cas des systèmes différentiels presque-linéaires.

Nous allons considérer maintenant des systèmes différentiels de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_i) + R_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (1 \leqq i \leqq n) \tag{1}$$

sous des hypothèses qui assurent l'existence d'une famille de solutions bornées sur le demi-axe $t \geqq t_0$.

Les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ seront supposées fixées pendant que les fonctions $R_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ seront interprétées comme des termes perturbateurs.

Le caractère conditionnel de la stabilité résultera du fait que, dans sa définition, on engage seulement les solutions bornées des systèmes de la forme (1).

1. Pour démontrer l'existence des solutions bornées des systèmes de la forme (1), nous aurons besoin de certains résultats que nous avons établis antérieurement [3].

Supposons que la fonction $f(t, x)$ satisfait aux conditions suivantes:

a) elle est continue dans le domaine $t \geqq t_0$, $|x| \leqq H$;

b) elle admet une dérivée par rapport à x, telle que $0 < m \leqq \dfrac{\partial f}{\partial x} \leqq M$ dans tout le domaine de définition;

c) $|f(t, 0)| \leqq K \leqq mH$ pour $t \geqq t_0$.

Alors, l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{2}$$

admet une seule solution $x(t)$, définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$, telle que $|x(t)| \leqq H$. Cette solution satisfait à l'inégalité

$$|x(t)| \leqq \frac{K}{m}, \qquad t \geqq t_0. \tag{3}$$

L e m m e 1. *Soit* $f_n(t, x)$ $(n \geqq 1)$ *une suite de fonctions satisfaisant aux conditions* a), b), c), *et soit* $x_n(t)$ $(n \geqq 1)$ *la solution de l'équation*

$$\frac{dx}{dt} = f_n(t, x), \tag{4}$$

satisfaisant à la limitation (3). *Admettons que*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t, x) = f(t, x), \tag{5}$$

uniformément dans tout domaine $t_0 \leqq t \leqq t_1$, $|x| \leqq H$. *Si* $f(t, x)$ *satisfait à la condition* b) *avec* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *continue, on a*

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t), \tag{6}$$

uniformément sur tout intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$, $x(t)$ *étant la solution de l'équation* (2) *pour laquelle l'inégalité* (3) *est satisfaite.*

D é m o n s t r a t i o n. Tout d'abord remarquons que la fonction $f(t, x)$ satisfait elle-même aux conditions a) et c). Par conséquent, il existe une seule solution $x(t)$ de l'équation (2), satisfaisant à la condition (3). On peut écrire

$$\frac{d(x - x_n)}{dt} = f(t, x) - f(t, x_n) + f(t, x_n) - f_n(t, x_n) \qquad (n \geqq 1).$$

Mais $f(t, x) - f(t, x_n) = \varphi_n(t)(x - x_n)$, $\varphi_n(t)$ étant des fonctions continues sur le demi-axe $t \geqq t_0$, telles que $0 < m \leqq \varphi_n(t) \leqq M$, $n \geqq 1$. La fonction $x - x_n$ satisfait donc à l'équation linéaire

$$\frac{d(x - x_n)}{dt} = \varphi_n(t)(x - x_n) + f(t, x_n) - f_n(t, x_n). \tag{7}$$

Les hypothèses admises assurent l'existence d'un nombre positif K_1, tel que

$$|f(t, x_n(t)) - f_n(t, x_n(t))| \leqq K_1 \qquad (t \geqq t_0,\ n \geqq 1), \tag{8}$$

ce qui nous permet de représenter la fonction $x - x_n$ $(n \geqq 1)$ à l'aide de la formule

$$x(t) - x_n(t) = -\int_t^\infty \exp\left(-\int_t^\tau \varphi_n(\theta)\, d\theta\right) \{f_n(\tau, x_n(\tau)) - f_n(\tau, x_n(\tau))\}\, d\tau. \tag{9}$$

Fixons maintenant un intervalle $t_0 \leqq t \leqq t_1$ et soit $T > t_1$. Si $t_0 \leqq t \leqq T$, alors

$$|x(t) - x_n(t)| \leqq \int_t^T |f(\tau, x_n(\tau)) - f_n(\tau, x_n(\tau))|\, d\tau + K_1 \int_T^\infty e^{-m(\tau - t)}\, d\tau. \tag{10}$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Choisissons T suffisamment grand, tel que

$$(11)\qquad K_1 \int_T^\infty e^{-m(\tau-t_1)}\, d\tau = \frac{K_1}{m} e^{-m(T-t_1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après (5), on peut trouver un entier $N(\varepsilon, t_1)$ tel qu'on ait dans l'intervalle $t_0 \leqq t \leqq T$

$$(12)\qquad |f(t, x_n(t)) - f_n(t, x_n(t))| < \frac{\varepsilon}{2(T-t_0)},$$

dès que $n \geqq N(\varepsilon, t_1)$.

En tenant compte des relations (10), (11) et (12), il résulte

$$(13)\qquad |x(t) - x_n(t)| < \varepsilon \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,\ n \geqq N(\varepsilon, t_1),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Supposons maintenant que la fonction $f(t, x)$ satisfait à la condition a), et en outre aux conditions suivantes:

b_1) Elle admet une dérivée par rapport à x, telle que $-M \leqq \frac{\partial f}{\partial x} \leqq -m < 0$, dans tout le domaine de définition;

c_1) $|f(t, 0)| \leqq K < mH$ pour $t \geqq t_0$.

Alors, l'équation (2) admet une seule solution $x(t)$ définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$, avec $|x(t)| \leqq H$, satisfaisant à la condition initiale

$$(14)\qquad x(t_0) = x_0,$$

dès que

$$(15)\qquad |x_0| \leqq H - \frac{K}{m}.$$

Plus précisément, cette solution satisfait à l'inégalité

$$(16)\qquad |x(t)| \leqq |x_0| + \frac{K}{m}, \qquad t \geqq t_0.$$

R e m a r q u e. On peut énoncer un lemme analogue au lemme 1, en remplaçant les conditions a), b) c) par les conditions a), b_1), c_1). Cela résulte directement des théorèmes généraux sur la dépendance continue de la solution par rapport aux seconds membres des équations (sur tout intervalle fini).

2. Considérons maintenant des systèmes différentiels de la forme

$$(17)\qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_i) + h_i(t) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

sous les hypothèses suivantes:

α) Les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ sont continues dans le domaine $t \geqq t_0$, $|x_i| \leqq H$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

β) Chaque fonction $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ admet une dérivée par rapport à x_i, satisfaisant à l'une ou l'autre des conditions:

$$-M \leqq \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqq -m < 0, \tag{A}$$

$$0 < m \leqq \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqq M. \tag{B}$$

Nous allons désigner par i_A un indice quelconque pour lequel la condition (A) est satisfaite. i_B aura une signification analogue.

γ) $\quad f_1(t, 0) = 0, \ |f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0)| \leqq L \sum_{j=1}^{i-1} |x_j| \ (2 \leqq i \leqq n),$

L étant une constante positive.

En ce qui concerne les fonctions $h_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ nous ferons des précisions ci-dessous.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les notations suivantes: si $f(t) = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ est une fonction-vecteur bornée sur le demi-axe $t \geqq t_0$, alors $\|f_i\| = \sup_{t \geqq t_0} |f_i(t)|$, $\|f\| = \max_i \|f_i\|$.

Lemme 2. *Admettons les hypothèses α), β), γ). De plus, les fonctions $h_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ soient continues et bornées sur le demi-axe $t \geqq t_0$.*

Le système différentiel (17) *admet alors une seule solution $x(t)$ définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$, telle que*

$$x_i(t_0) = \overset{0}{x_i}, \qquad i = i_A, \tag{18}$$

dès que $\|h\|$ et $\sum_{j=i_A} |x_j^0|$ sont suffisamment petits. Cette solution satisfait à l'inégalité

$$\|x\| \leqq P \sum_{j=i_A} |x_j^0| + Q \|h\|, \tag{19}$$

P et Q étant deux nombres positifs qui dépendent seulement de L et m.

Démonstration. Considérons tout d'abord la première équation du systéme (17):

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1) + h_1(t). \tag{20}$$

En tenant compte des hypothèses α), β), γ) et du fait que x_1^0 et $h(t)$ sont assez petits, il résulte que l'équation (20) admet une seule solution $x_1(t)$, définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$ et satisfaisant à la condition $|x_1(t)| \leqq H$, quand l'indice 1 est un i_B. Quand l'indice 1 est un i_A, l'équation (20) admettra aussi une seule solution $x_1(t)$, définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$ et satisfaisant à la limitation $|x_1(t)| \leqq H$, telle que $x_1(t_0) = x_1^0$.

Soit $\varepsilon_i = 1$ pour $i = i_A$ et $\varepsilon_i = 0$ pour $i = i_B$.

Les inégalités (3) et (16) nous permettent d'écrire

$$\|x_1\| \leqq \varepsilon_1 |x_1^0| + \frac{\|h\|}{m}. \tag{21}$$

$x_1(t)$ étant déterminé, la deuxième équation du système (17) contiendra seulement l'inconnue $x_2(t)$. Si l'indice 2 est un i_B, $x_2(t)$ sera uniquement déterminé. Si l'indice 2 est un i_A, il faudra tenir compte des conditions (18).

En tenant compte de l'inégalité (21), on peut écrire

$$\|x_2\| \leqq \varepsilon_2 |x_2^0| + \frac{L}{m} \varepsilon_1 |x_1^0| + \frac{\|h\|}{m}\left(1 + \frac{L}{m}\right). \tag{22}$$

Un raisonnement par récurrence nous montre que les fonctions $x_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ sont uniquement déterminées à l'aide du système (17) et des conditions (18). De plus, les inégalités

$$\|x_i\| \leqq \sum_{j = i_A \leqq i} \varepsilon_j \left(\frac{L}{m}\right)^{i-j} |x_j^0| + \frac{\|h\|}{m} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{L}{m}\right)^j \qquad (1 \leqq i \leqq n) \tag{23}$$

sont vérifiées. Si nous posons

$$P = \max \left\{1, \left(\frac{L}{m}\right)^{n-1}\right\}, \qquad Q = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{L}{m}\right)^j, \tag{24}$$

on aura

$$\|x\| \leqq P \sum_{j=i_A} |x_j^0| + Q\|h\|,$$

c'est-à-dire, l'inégalité (19).

Il résulte, en tenant compte des considérations faites ci-dessus, qu'il suffit d'admettre

$$P \sum_{j=i_A} |x_j^0| + Q\|h\| \leqq H.. \tag{25}$$

C'est justement la précision des limites supérieures pour les grandeurs $\sum_{j=i_A} |x_j^0|$ et $\|h\|$.

Le lemme 2 nous permet de démontrer sans difficulté un théorème de stabilité conditionnelle par rapport aux perturbations permanentes. Mais, il se montre utile encore dans la démonstration d'un théorème d'existence.

3. Envisageons maintenant les systèmes différentielles de la forme (1).

Théorème 1. *Supposons que les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ satisfont aux conditions α), β), γ), et que les dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ sont continues. Supposons encore que les fonctions $R_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ sont* *continues et bornées dans le domaine* $t \geqq t_0$, $|x_i| \leqq H$ $(1 \leqq i \leqq n)$ *et y vérifient l'inégalité*

$$QR < H \quad \text{où} \quad R = \max_i \{\sup |R_i(t, x, \ldots, x_n)|\}. \tag{26}$$

Il existe alors au moins une solution $x(t)$ *du système* (1), *définie sur le demi-axe* $t \geqq t_0$, *satisfaisant aux conditions* (18), *dès que*

$$P \sum_{j=1}^{A} |x_j^0| \leqq H - QR. \tag{27}$$

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de SCHAUDER et TYCHONOFF sur l'existence des points invariants. Remarquons tout d'abord que les solutions du système (1) sont des applications continues du demi-axe $t \geqq t_0$ dans l'espace euclidien à n dimensions R^n. Par conséquent, l'espace $C_0([t_0, +\infty), R^n)$ s'impose d'une façon naturelle. C'est l'espace vectoriel des applications continues du demi-axe $t \geqq t_0$, dans R^n, avec la topologie de la convergence compacte ([1]), p. 13). Il faut remarquer que l'espace $C_0([t_0, +\infty), R^n)$ est localement convexe et métrisable. Cette dernière propriété nous permet l'utilisation des suites dénombrables.

Considérons l'ensemble M des applications $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_n(t)\} \in C_0([t_0, +\infty), R^n)$, telles que $|u_i(t)| \leqq H$ pour $t \geqq t_0$, $1 \leqq i \leqq n$. L'ensemble M est un sous-ensemble convexe de l'espace $C_c([t_0, +\infty), R^n)$.

Pour tout $u \in M$, soit $Au = x = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ la solution du système

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_i) + R_i(t, u_1, \ldots, u_n) \qquad (1 \leqq i \leqq n) \tag{28}$$

satisfaisant aux conditions initiales (18) et telle que $|x_i(t)| \leqq H$, $1 \leqq i \leqq n$. L'existence et l'unicité de telle solution est assurée, en vertu du lemme 2, par les hypothèses α), β), γ) et par les inégalités (26) et (27).

Il est évident que

$$AM \subset M. \tag{29}$$

Nous nous proposons maintenant de montrer la continuité de l'opérateur A. Soit donc $u_1^{(k)}(t) = \{u_1^{(k)}(t), \ldots, u_n^{(k)}(t)\}$ $(k \geqq 1)$, une suite d'éléments appartenant à M et soit $Au^{(k)} = x^{(k)}(t) = \{x_1^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t)\}$. Si $\lim_{k\to\infty} u^{(k)} = u$ dans le sens de la convergence compacte, c'est-à-dire uniformément sur tout intervalle fini, il faut montrer que $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x = Au$, dans le même sens. Cela veut dire que

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}(t) = x_i(t) \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{30}$$

uniformément sur tout intervalle fini. Maintenant, tout est réduit au lemme 1 et aux théorèmes sur la dépendance continue de la solution par rapport aux seconds membres des équations. Pour en déduire (30), on appliquera un raisonnement inductif sur i.

Enfin, l'ensemble AM est compact dans l'espace $C_0([t_0, +\infty), R^n)$. En effet, les fonctions $x_i(t)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, pour $x \in AM$, sont uniformément bornées, ainsi que leurs premières dérivées, sur tout le demi-axe $t \geqq t_0$. Par conséquent, elles constituent une famille équicontinue. Le théorème d'ASCOLI ([1] p. 43) nous permet d'affirmer que l'ensemble AM est relativement compact. Mais, l'ensemble AM est fermé dans l'espace $C_0([t_0, +\infty), R^n)$, étant l'image continue d'un ensemble fermé.

Toutes les conditions du théorème de SCHAUDER et TYCHONOFF étant satisfaites, par l'opérateur A et par l'ensemble M, on peut affirmer l'existence d'une application $x(t)$, telle que $Ax = x$. Les équations (18) nous montrent que cette application est une solution du système (1), ce qu'il fallait démontrer.

4. Considérons le système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_i) \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{31}$$

dans lequel les fonctions $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ satisfont aux conditions α), β) et γ).

D'après le lemme 2, $x(t) \equiv 0$ est la seule solution du système (31), satisfaisant aux conditions initiales

$$x_i(t_0) = 0, \qquad i = i_A. \tag{32}$$

Le système (31) admet aussi une solution unique $x(t)$, définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$, satisfaisant aux conditions (18), dès que

$$P \sum_{j=i_A} |x_j^0| \leqq H.$$

Mais, la stabilité de telle solution revient à la stabilité de la solution banale.

Théorème 2. *Soient $f_i(t, x_1, \ldots, x_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, des fonctions satisfaisant aux conditions α), β) et γ). Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < H)$, on peut trouver deux nombres positifs $\delta(\varepsilon)$ et $\eta(\varepsilon)$, avec les propriétés suivantes:*

Pour tout système de nombres x_j^0 $(j = i_A)$ tel que

$$\sum_{j=i_A} |x_j^0| < \delta(\varepsilon), \tag{33}$$

et fonctions $R_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, continues dans le domaine $t \geqq t_0$, $|x_i| \leqq H$ $(1 \leqq i \leqq n)$, telles que

$$|R_i(t, x_1, \ldots, x_n)| < \eta(\varepsilon), \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{34}$$

toute solution $x(t)$ du système (1), *définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$ et satisfaisant aux conditions* (18), *satisfait aussi à l'inégalité*

$$\|x\| < \varepsilon. \tag{35}$$

Démonstration. Soit $x(t)$ une solution du système (1), définie sur le demi-axe $t \geqq t_0$ et satisfaisant aux conditions initiales (18). Posons $r_i(t) = R_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $(1 \leqq i \leqq n)$. D'après (19), (33) et (34), on peut écrire

$$\|x\| < P\delta(\varepsilon) + Q\eta(\varepsilon). \tag{36}$$

Cette inégalité nous montre que (35) est vérifiée, en prenant, par exemple,

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2P}, \qquad \eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2Q}.$$

Remarque 1. D'après le théorème 1, pour l'existence d'une solution (au moins) satisfaisant aux conditions (18), il suffit d'admettre, de plus, la continuité des derivées $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

Remarque 2. Nous n'avons fait aucune hypothèse concernant l'unicité. Par conséquent, s'il existe plusieurs solutions satisfaisant aux conditions (18), l'inégalité (35) vaut pour l'une quelconque de ces solutions, dès que (33) et (34) sont satisfaites.

Remarque 3. Les cas $f_i(t, x_1, \ldots, x_i) \equiv f_i(t, x_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ a été envisagé dans un autre travail [4].

Ouvrages cités.

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Ch. X (Paris, 1949).
[2] C. Corduneanu, Sur la notion de stabilité, *Revue de Mathématique*, **2** (1957), 497—500.
[3] C. Corduneanu, Cîteva probleme globale referitoare la ecuaţiile diferenţiale de ordinul 1, *Analele ştiinţifice ale Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi,* **2** (1956), 33—50.
[4] C. Corduneanu, Cîteva consideraţii în legătură cu unele sisteme de ecuaţii differenţiale, *Studii şi cercetări, Filiala Iaşi a Academiei RPR,* **7** (1956), 13—30.

UNIVERSITÉ DE JASSY,
SEMINAIRE MATHÉMATIQUE "A. MYLLER".

(Reçu le 10 avril 1958)

Über die kovariante Ableitung der Vektoren.

Von ARTHUR MOÓR in Szeged.

Einleitung.

Der Begriff der kovarianten Ableitung der geometrischen Objekte wurde von J. A. SCHOUTEN eingeführt, und die explizite Form für die geometrischen Objekte erster Klasse mit einer Komponente im eindimensionalen Fall wurde von S. GOŁĄB bestimmt[1]). Dabei gab S. GOŁĄB für den Begriff der kovarianten Ableitung eine etwas allgemeinere Formulierung als J. A. SCHOUTEN.

Wir wollen im folgenden die explizite Form der kovarianten Ableitung der Vektoren im n-dimensionalen Raum unter gewissen weiteren einschränkenden Forderungen (wie z. B. Linearität und Stetigkeit der Funktionen) angeben. Wir werden in dieser Arbeit durchwegs über Vektoren und kovariante Ableitung von Vektoren sprechen, obwohl es sich um Vektorfelder und die Ableitung von Vektorfeldern handelt. Die Definition der kovarianten Ableitung der Vektoren ist nach der entsprechenden Erweiterung der GOŁĄB-schen Formulierung die folgende

Definition. *Die kovariante Ableitung $D_k v^i$ bzw. $D_k w_i$ der kontra- bzw. kovarianten Vektoren v^i, bzw. w_i soll ein Affinor zweiter Stufe $T^i{}_k$ bzw. T_{ik} sein. Die $T^i{}_k$ bzw. T_{ik} sollen Funktionen sein, die*

a) *von den Komponenten v^i, bzw. w_i,*

b) *von den partiellen Ableitungen $\partial_k v^i$, bzw. $\partial_k w_i$,*

c) *von den Übertragungsparametern $A_i{}^j{}_k$ mit der Transformationsformel*

$$A_\alpha{}^\beta{}_\gamma = A_i{}^j{}_k A^i_\alpha A^\beta_j A^k_\gamma + \frac{\partial^2 \xi^r}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\gamma} A^\beta_r, \tag{0.1}$$

$$A^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^\alpha}, \qquad A^\beta_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi^j} \tag{0.2}$$

---

[1]) S. GOŁĄB, Über den Begriff der kovarianten Ableitung, *Nieuw Archiv voor Wiskunde* (3) 2 (1954), 90—96.

abhängig sind, und die Funktionen

d) $T^i{}_k$, *bzw.* T_{ik} *sollen in allen ihren Veränderlichen stetig sein.*

In der Gleichung (0. 1) bedeuten die $A_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ bzw. die $A_i{}^j{}_k$ die verschiedenen Komponenten des Übertragungsparameters in dem Koordinatensystem ξ^α bzw. ξ^i. Die verschiedenen Koordinatensysteme werden wir im folgenden durch griechische bzw. lateinische Indizes kennzeichnen. $\alpha, \beta, \ldots, a, b, \ldots$ durchlaufen also die Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

Die Forderung d) kommt bei S. GOŁĄB nicht vor; in manchen Fällen kann sie aber mit großem Nutzen angewandt werden. Aus unserer Definition können wir die explizite Form der kovarianten Ableitung noch nicht eindeutig bestimmen; gewisse Gesetzmäßigkeiten sind aber schon durch sie bestimmt. Für die vollständige Bestimmung der kovarianten Ableitung werden wir noch weitere einschränkende Bedingungen machen.

Über den Übertragungsparametern $A_i{}^j{}_k$ wollen wir bemerken, daß zwischen den bisher bekannten Objekten zweiter Klasse im n-dimensionalen Raum X_n die $A_i{}^j{}_k$ die einfachste Transformationsformel haben.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß zwischen dem kovarianten und dem kontravarianten Fall, falls die Übertragungsparameter symmetrisch sind, ein Unterschied existiert, wie das nach den Sätzen 2 und 3 unmittelbar ersichtlich ist.

§ 1. Die allgemeine kovariante Ableitung.

Die allgemeinen Übertragungsparameter $A_i{}^j{}_k$ können in der Form:

$$A_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + S_i{}^j{}_k \tag{1. 1}$$

geschrieben werden, wo

$$\Gamma_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(A_i{}^j{}_k + A_k{}^j{}_i), \qquad S_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(A_i{}^j{}_k - A_k{}^j{}_i) \tag{1. 1a}$$

den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Teil von $A_i{}^j{}_k$ bedeuten. Wenn die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i bestimmt werden soll, so werden wir $A_i{}^j{}_k$ immer in der Form (1. 1) benützen. (Vgl. auch (1.1a).)

Für die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i beweisen wir den folgenden

Satz 1. *Die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors* v^i *ist eine Funktion von*

$$\nabla_k v^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k v^i + \Gamma_r{}^i{}_k v^r, \tag{1. 2}$$

von $S_i{}^j{}_k$ *und von* v^i.

Beweis. Nach unserer in der Einleitung angegebenen Definition ist die kovariante Ableitung $T^i_{\ k}$ des kontravarianten Vektors v^i von $\partial_k v^i$, $A_i{}^j{}_k$ und von v^i abhängig, d. h. es ist

$$(1.3)\qquad D_k v^i \equiv T^i_{\ k}(\partial_a v^b,\ \Gamma_a{}^b{}_c,\ S_a{}^b{}_c,\ v^a);$$

dabei haben wir (1. 1) und (1. 1a) benützt.

Nach einer zulässigen Koordinatentransformation $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\xi^i)$ transformieren sich die v^b und die $\partial_a v^b$ nach den Transformationsformeln:

$$(1.4')\qquad v^\beta = A^\beta_s v^s,$$

$$(1.4)\qquad \partial_\alpha v^\beta = A^\beta_t A^s_\alpha \partial_s v^t - B_\alpha{}^\beta{}_\sigma A^\sigma_t v^t,\quad B_\alpha{}^\beta{}_\sigma \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \xi^t}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\sigma} A^\beta_t,$$

während die $\Gamma_a{}^b{}_c$ dieselbe Transformationsformel wie die $A_a{}^b{}_c$ haben. $S_a{}^b{}_c$ ist nach (0. 1) und (1. 1a) ein Affinor. Bei der Bestimmung von (1. 4) haben wir die aus (0. 2) folgende Relation

$$(1.5)\qquad A^\beta_t A^t_\alpha = \delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{wenn } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

nach ξ^ϱ differenziert, und (1. 5) nochmals beachtet. Für $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ hat man nach unserer vorigen Bemerkung:

$$(1.6)\qquad \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \Gamma_i{}^j{}_k A^i_\alpha A^\beta_j A^k_\gamma + B_\alpha{}^\beta{}_\gamma.$$

Beachtet man jetzt, daß wegen des Affinorcharakters von $D_l v^k$ und wegen (1. 3)

$$(1.7)\qquad D_\lambda v^\varkappa = A^\varkappa_r A^s_\lambda D_s v^r,\quad D_\lambda v^\varkappa = T^k_{\ l}(\partial_\alpha v^\beta,\ \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma,\ S_\alpha{}^\beta{}_\gamma,\ v^\alpha)^{2)}$$
$$(\varkappa = k,\ \lambda = l)$$

besteht, so folgt auf Grund der Gleichungen (1. 3), (1. 4) und (1. 6) im Hinblick auf den Affinorcharakter von $S_i{}^j{}_k$:

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} &T^k_{\ l}(A^\alpha_r A^s_\beta \partial_s v^r - B_\beta{}^\alpha{}_\sigma A^\sigma_t v^t,\ \Gamma_r{}^s{}_t A^r_\beta A^\alpha_s A^t_\gamma + B_\beta{}^\alpha{}_\gamma,\ S_r{}^s{}_t A^r_\beta A^\alpha_s A^t_\gamma,\ A^\alpha_t v^t) \equiv \\ &\equiv A^\varkappa_t A^s_\lambda T^t_{\ s}(\partial_b v^a,\ \Gamma_b{}^a{}_c,\ S_b{}^a{}_c,\ v^a) \qquad (\varkappa = k,\ \lambda = l). \end{aligned}$$

(1. 8) stellt ein Funktionalgleichungssystem für n^2 unbekannte Funktionen $T^k_{\ l}$ von $p = n + n^2 + n^3$ Veränderlichen dar. Die Funktionalgleichungen (1. 8) sollen für die folgenden unabhängigen Veränderlichen erfüllt werden:

$$v^a,\ \partial_b v^a,\ A^r_\alpha,\ B_\beta{}^\alpha{}_\gamma,\ \Gamma_b{}^a{}_c,\ S_b{}^a{}_c.$$

Es ist nämlich immer möglich in einem festen Punkte ξ^i_0 eine Koordinaten-

---

2) Diese Formel drückt aus, daß die Komponenten $T^\varkappa_{\ \lambda}$ dadurch bestimmt werden können, daß man in $T^k_{\ l}$ $\partial_\alpha v^\beta$, $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, $S_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ und v^α substituiert.

transformation $\xi^{\alpha}=\xi^{\alpha}(\xi')$ (mit $\mathrm{Det}(A^r_\alpha)\neq 0$) zu wählen, bei welcher die A^r_α und die $B_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ vom vornherein gegeben sind.

Wenn wir nun in (1.8)

$$A^\alpha_t=\delta^a_t,\quad B_\beta{}^\alpha{}_\gamma=-\Gamma_b{}^a{}_c \qquad (\alpha=a,\ \beta=b,\ \gamma=c) \tag{1.8'}$$

setzen, so bekommt man nach (1.5), daß auch $A^t_\beta=\delta^t_b$, $(\beta=b)$ besteht, und

$$T^k{}_l=T^k{}_l\,(\nabla_b v^a,\ 0,\ S_b{}^a{}_c,\ v^a) \tag{1.9}$$

ist, wo $\nabla_b v^a$ durch (1.2) bestimmt ist. Das beweist eben den Satz 1.

Die kovariante Ableitung der kovarianten Vektoren kann in analoger Weise behandelt werden. Beachten wir die Transformationsformeln von w_b und $\partial_a w_b$, so bekommen wir statt der charakteristischen Funktionalgleichung (1.8) im kovarianten Fall:

$$\begin{aligned} T'_{kl}\,(A^s_\alpha A^r_\beta \partial_s w_r+A^t_\varrho B_\alpha{}^\varrho{}_\beta w_t,\ \Gamma_r{}^s{}_t A^r_\alpha A^\gamma_s A^t_\beta+B_\alpha{}^\gamma{}_\beta,\ S_r{}^s{}_t A^r_\alpha A^\gamma_s A^t_\beta,\ A^t_\alpha w_t)\equiv \\ \equiv A^t_\varkappa A^s_\lambda T_{ts}\,(\partial_a w_b,\ \Gamma_a{}^c{}_b,\ S_a{}^c{}_b,\ w_a) \qquad (\varkappa=k,\ \lambda=l). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Nach der Substitution (1.8') bekommt man das Analogon des Satzes 1 für kovariante Vektoren, doch bedeutet jetzt $\nabla_k w_i$ die Formel:

$$\nabla_k w_i \overset{\text{def}}{=} \partial_k w_i-\Gamma_i{}^s{}_k w_s. \tag{1.11}$$

Wir haben also den

Satz 2. *Die kovariante Ableitung der kovarianten Vektoren ist eine Funktion von $\nabla_k w_i$, von $S_i{}^j{}_k$ und von w_i.*

Die Formeln (1.2) und (1.11) sind übrigens auch selbst kovariante Ableitungen von Vektoren, die Übertragungsparameter $\Gamma_i{}^j{}_k$ sind aber in diesem Falle in den unteren Indexen symmetrisch.

§ 2. Symmetrische Übertragungsparameter.

In diesem Paragraphen wollen wir annehmen, daß *die $A_i{}^j{}_k$ in den Indizen i, k symmetrisch sind,* d. h. nach (1.1):

$$A_i{}^j{}_k=\Gamma_i{}^j{}_k,\quad S_i{}^j{}_k=0 \tag{2.1}$$

besteht.

Für die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i beweisen wir den folgenden

Satz 3. *Die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i ist eine Funktion von*

$$\nabla_k v^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k v^i+\Gamma_t{}^i{}_k v^t, \tag{2.2}$$

falls (2.1) *besteht.*

Beweis. Nach dem Satz 1 und nach (2. 1) ist die kovariante Ableitung $T^k{}_l$ von v^a von der Form:

$$D_l v^k \equiv T^k{}_l\,(\nabla_a v^b,\, v^a).$$

Um den vollständigen Beweis des Satzes 3 zu vollbringen, müssen wir somit zeigen, daß $T^k{}_l$ von v^a nicht in expliziter Weise, sondern nur durch $\nabla_b v^a$ abhängt. Beachtet man (2. 1), so bekommt man statt des Funktionalgleichungssystems (1. 8)

$$(2.3)\qquad T^k{}_l\,(A^a_t A^s_\beta \nabla_s v^t,\ A^a_t v^t) = A^\varkappa_t A^s_\lambda T^t{}_s\,(\nabla_b v^a,\, v^a)\qquad (\varkappa = k,\ \lambda = l).$$

Setzen wir jetzt in dieses Funktionalgleichungssystem den Wert

$$A^t_\alpha = \varrho^{-1}\,\delta^t_a \qquad (a=\alpha)$$

ein, so folgt nach (1. 5), daß

$$A^\beta_t = \varrho\,\delta^b_t \qquad (b=\beta)$$

ist, und aus (2. 3) bekommt man

$$(2.4)\qquad T^k{}_l\,(\nabla_b v^a,\, \varrho v^a) = T^k{}_l\,(\nabla_b v^a,\, v^a).$$

Diese Formel drückt aus, daß die Funktion $T^k{}_l\,(\nabla_b v^a,\, v^a)$ in den Veränderlichen v^a homogen von nullter Dimension ist.

Nach unserer Forderung d) (vgl. die Einleitung) muß $T^k{}_l$ in v^a stetig sein. Die Richtigkeit des folgenden Lemmas ist aber fast trivial:

Lemma. *Ist eine in den Veränderlichen ξ^a stetige Funktion $F(\xi^a)$ homogen von nullter Dimension, so ist sie eine Konstante.*

Wegen der Homogenität von nullter Dimension ist nämlich

$$F(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) = F(\varrho\xi^1, \varrho\xi^2, \ldots, \varrho\xi^n),$$

und aus $\varrho \to 0$ folgt schon das Lemma.

Auf Grund dieses Lemmas folgt schon die Richtigkeit des Satzes 3, da nach (2. 4) $T^k{}_l$ in den v^a homogen von nullter Dimension, und somit nach der Forderung d) von v^a unabhängig ist.

Die kovariante Ableitung von v^i hat also die Form:

$$D_k v^i \equiv T^i{}_k\,(\nabla_b v^a.$$

Unsere Definition, die wir für die kovariante Ableitung in der Einleitung angegeben haben, ist hinreichend für die Gültigkeit des Satzes 3, da wir bei dem Beweis nur die in der Definition formulierten Eigenschaften der kovarianten Ableitung benutzt haben. $T^i{}_j$ kann aber noch mannigfache Formen haben. Wir geben einige Beispiele:

$$T^i{}_j = \nabla_j v^i, \quad T^i{}_j = \nabla_r v^i\,\nabla_j v^r, \quad T^i{}_j = \nabla_r v^i\,\nabla_s v^r\,\nabla_j v^s.$$

Wenn

$$\nabla_r v^i t^r_j = \delta^i_j$$

ist, so kann z. B. auch

$$T^i_j = t^i_j, \quad T^i_j = t^i_r t^r_j, \quad T^i_j = t^i_r t^r_s t^s_j$$

gesetzt werden.

Eine wichtige Eigenschaft von T^k_m kann aber leicht bestimmt werden. Die Transformationsformel von T^k_m ist nämlich:

$$T^k_m \left(A^\alpha_r A^s_\beta \nabla_s v^r\right) = A^\varkappa_r A^s_\mu T^r_s \left(\nabla_b v^a\right) \qquad (\varkappa = k, \ \mu = m).$$

Nach der Substitution $A^\alpha_r = \varrho_{(r)} \delta^a_r$ [3]) $(a = \alpha)$ folgt nach (1. 5) $A^t_\beta = \varrho^{-1}_{(b)} \delta^t_b$ $(b = \beta)$, und somit wird

$$T^k_m \left(\varrho_{(a)} \varrho^{-1}_{(b)} \nabla_b v^a\right) = \varrho_{(k)} \varrho^{-1}_{(m)} T^k_m \left(\nabla_b v^a\right)$$

(nicht summieren auf a, b, k, m).

Wir wollen jetzt den kovarianten Fall untersuchen, d. h. die kovariante Ableitung der kovarianten Vektoren bestimmen, falls die Bedingungen (2. 1) gültig sind. Am Ende des ersten Paragraphen haben wir bewiesen, daß die kovariante Ableitung T_{ik} der kovarianten Vektoren, falls (2. 1) besteht, die Form

$$D_k w_i \equiv T_{ik} \left(\nabla_a w_b, w_a\right) \tag{2. 5}$$

haben muß, wo $\nabla_a w_b$ durch (1. 11) bestimmt ist.

Die Formel (2. 5) beweist den folgenden

Satz 4. *Die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors ist eine Funktion von $\nabla_a w_b$ und w_a, falls* (2. 1) *besteht.*

Im kontravarianten Fall konnte man wegen der Stetigkeit beweisen, daß die kovariante Ableitung von v^i nur mittels $\nabla_a v^b$ abhängig sein kann. Im kovarianten Fall ist aber der entsprechende Satz nicht gültig, d. h. Satz 4 kann in dieser Richtung nicht verbessert werden.

Wir werden durch ein Beispiel zeigen, daß in der Formel der kovarianten Ableitung von w_i die Größen $\nabla_b w_a$ und w_a in expliziter Weise vorkommen können.

Die Formel

$$T_{ik} = \nabla_i w_k - w_i w_k$$

bestimmt eine kovariante Ableitung von w_i, die die Definition befriedigt, und auch von w_a in expliziter Weise abhängt.

Beschränken wir uns auf diejenigen kovarianten Ableitungen von w_i, die allein von $\nabla_k w_i$ abhängig sind, so kann die allgemeinste Form von T_{ik}

---

[3]) Bei den Substitutionen von dieser Form soll jetzt und im folgenden auf die unteren Indizes *nicht summiert* werden.

bestimmt werden. $\nabla_k w_i$ ist nämlich ein Affinor (Tensor) zweiter Stufe, und die allgemeinste Form von T_{ik} kann mit der Methode von M. IKEDA und S. ABE bestimmt werden[4]). Wenn T_{ik} in i, k symmetrisch sein soll, so ist:

$$D_i w_k \equiv T_{ik} = c \nabla_i w_k, \qquad c: \textit{Skalar}.$$

§ 3. Die lineare kovariante Ableitung.

Für die kovariante Ableitung haben wir in der Einleitung die Forderungen a)—d) gestellt. Zu diesen wollen wir noch die folgende Forderung hinzufügen:

e) *Die kovariante Ableitung eines Vektors v^i bzw. w_i soll in $\partial_k v^i$ und v^i, bzw. in $\partial_k w_i$ und w_i homogen linear sein.*

Aus der Formel (1.9) folgt dann wegen der Forderung e) für $T^i_{\ j}$ die Form:

$$D_j v^i \equiv T^i_{\ j} = a_t{}^{i\,s}_{\ j}(S_a{}^b{}_c)\nabla_s v^t + b_t{}^i{}_j(S_a{}^b{}_c)v^t, \tag{3.1}$$

wo $a_t{}^{i\,s}_{\ j}$ und $b_t{}^i{}_j$ aus $S_a{}^b{}_c$ gebildete Affinoren sind.

Wir werden jetzt beweisen, daß *der Affinor $a_t{}^{i\,s}_{\ j}$ in der Formel* (3. 1) *die folgende Form hat:*

$$a_r{}^{i\,s}_{\ j} = c_1 \delta^i_r \delta^s_j + c_2 \delta^i_j \delta^s_r, \qquad c_\varrho: \textit{Skalar}, \ \varrho = 1, 2. \tag{3.2}$$

Da nach der Transformationsformel (0. 1) und wegen (1. 1a) $S_a{}^b{}_c$ ein Affinor ist, und nach (3. 1) $a_t{}^{i\,s}_{\ j}$ einen Affinor bedeutet, besteht

$$a_t{}^{k\,s}_{\ l}(S_\alpha{}^\beta{}_\gamma) = a_h{}^{p\,r}_{\ j}(S_a{}^b{}_c) A^\varkappa_p A^h_\iota A^\sigma_r A^j_\lambda \tag{3.3}$$
$$(\varkappa = k, \ \lambda = l, \ \tau = t, \ \sigma = s)$$

mit

$$S_\alpha{}^\beta{}_\gamma = S_i{}^k{}_j A^i_\alpha A^\beta_k A^j_\gamma. \tag{3.3a}$$

Man bekommt nämlich die Komponenten $a_\varrho{}^{\varkappa\,\sigma}_{\ \lambda}$, indem man in $a_r{}^{k\,s}_{\ l}$ statt $S_a{}^b{}_c$ die Größen $S_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ substituiert. Wenn wir in (3. 3) und (3. 3a) $A^\alpha_\tau = \varrho\delta^\sigma_t$ $(t = \tau)$ substituieren, so wird wegen (1. 5) $A^\alpha_s = \varrho^{-1}\delta^\alpha_s$ $(a = \alpha)$ und aus (3. 3) wird:

$$a_t{}^{k\,s}_{\ l}(\varrho S_a{}^b{}_c) = a_t{}^{k\,s}_{\ l}(S_a{}^b{}_c).$$

Diese Gleichung drückt aus, daß $a_t{}^{k\,s}_{\ l}$ in seinen Veränderlichen homogen von nullter Dimension ist. Wegen der Stetigkeit folgt aber dann nach unserem Lemma (§ 2), daß die $a_t{}^{i\,s}_{\ j}$ Skalaren sind, d. h. $a_\gamma{}^{\alpha\,\beta}_{\ \delta} = a_c{}^{a\,b}_{\ d}$ wenn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $\delta = d$ ist.

---

[4]) MINEO IKEDA und SHINGO ABE, On tensorial concomitants of a non-symmetric tensor $g_{\gamma\nu}$. I, *Tensor,* new series, 7 (1957), 59—69. Für den symmetrischen Fall vgl. A. MOÓR, Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind, *Publicationes Math. Debrecen,* 6. (Vor Erscheinung.)

Aus (3. 3) bekommt man somit nach einer Kontraktion mit $A^i_\varkappa A^m_\sigma$:

(3. 4) $$a_{t\,\lambda}^{\varkappa\,\sigma} A^i_\varkappa A^m_\sigma = a_{s\,t}^{i\,m} A^s_\tau A^t_\lambda .$$

Wählt man jetzt für A^t_μ

(3. 5) $$A^t_\mu = \varrho_{(\mu)}\, \delta^t_\mu \qquad \text{(nicht summieren auf } \mu),$$

so bekommt man aus (3. 4)

(3. 6) $$\varrho_{(k)}\varrho_{(m)} a_{\tau\,\lambda}^{k\,m} = \varrho_{(\tau)}\varrho_{(\lambda)} a_{\tau\,\lambda}^{k\,m} \qquad \text{(nicht summieren auf } k, m, \tau, \lambda).$$

Da die $\varrho_{(i)}$ von einander unabhängig sind, folgt aus unserer letzten Gleichung, daß $a_{\tau\,\lambda}^{k\,m}$ die Form:

(3. 7) $$a_{t\,l}^{k\,m} = \underset{(1)}{c}{}_{t\,l}^{k\,m}\, \delta^k_t\, \delta^m_l + \underset{(2)}{c}{}_{t\,l}^{k\,m}\, \delta^k_l\, \delta^m_t \qquad \text{(nicht summieren auf } k, m, t, l)$$

haben muß, wo die $\underset{(\varrho)}{c}{}_{t\,l}^{k\,m}$ Skalaren bedeuten. Offenbar befriedigt (3. 7) die Gleichung (3. 6), da jetzt die griechischen und die lateinischen Indizes dieselben Komponenten bezeichnen, denn die $a_{t\,l}^{k\,m}$ und die $\underset{(\varrho)}{c}{}_{t\,l}^{k\,m}$ Skalaren sind.

Substituieren wir nun die Formel (3. 7) in (3. 4), so bekommen wir:

$$\underset{(1)}{c}{}_{\tau\,\lambda}^{\tau\,\lambda} A^i_\tau A^m_\lambda + \underset{(2)}{c}{}_{\tau\,\lambda}^{\lambda\,\tau} A^i_\lambda A^m_\tau = \underset{(1)}{c}{}_{i\,m}^{i\,m} A^i_\tau A^m_\lambda + \underset{(2)}{c}{}_{m\,i}^{i\,m} A^i_\lambda A^m_\tau$$
$$\text{(nicht summieren auf } \tau, \lambda, i, m).$$

Da die Veränderlichen A^i_τ beliebig sind, folgt aus unserer letzten Formel, daß

$$\underset{(1)}{c}{}_{\tau\,\lambda}^{\tau\,\lambda} = \underset{(1)}{c}{}_{i\,m}^{i\,m} = c_1, \qquad \underset{(2)}{c}{}_{\tau\,\lambda}^{\lambda\,\tau} = \underset{(2)}{c}{}_{m\,i}^{i\,m} = c_2$$
$$\text{(nicht summieren auf } \tau, \lambda, i, m)$$

bestehen. Auf Grund von (3. 7) beweisen aber diese Formeln eben die Relation (3. 2).

Auf Grund der Formeln (3. 1) und (3. 2) besteht der folgende

Satz 5. *Die lineare kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i ist immer von der Gestalt*

(3. 8) $$D_k v^i = c_1 \nabla_k v^i + c_2 \delta^i_k \nabla_t v^t + b_t{}^i{}_k (S_a{}^b{}_c)\, v^t,$$

wo c_1 und c_2 Skalaren sind, und $b_t{}^i{}_k$ ein Affinor dritter Stufe ist.

Der Affinor $b_r{}^i{}_j$ ist nicht eindeutig bestimmt, denn aus dem Affinor $S_a{}^b{}_c$ können mehrere Affinoren vom Typ $b_r{}^i{}_j$ gebildet werden. Z. B.

$$b_r{}^i{}_j = S_r{}^i{}_j, \qquad b_r{}^i{}_j = g_{rj}\, S_k{}^k{}_t\, g^{ti},$$

wo

$$g_{rj} \overset{\text{def}}{=} S_m{}^m{}_t\, S_r{}^t{}_j, \qquad g_{rs} g^{sj} = \delta^j_r$$

bedeutet.

Im kovarianten Fall bekommt man in analoger Weise aus der entsprechenden Forderung e), daß die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors w_i die Form:

$$D_k w_i = a_{i\ k}^{\ r\ s} \nabla_r w_s + b_i{}^r{}_k (S_a{}^b{}_c) w_r$$

hat. Nach (3. 2) wird:

$$D_k w_i = c_1 \nabla_k w_i + c_2 \nabla_i w_k + b_i{}^r{}_k (S_a{}^b{}_c) w_r, \tag{3. 9}$$

wo $\nabla_k w_i$ durch (1. 11) bestimmt ist. Dieses Resultat kann man im folgenden Satz zusammenfassen:

S a t z 6. *Die lineare kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors ist immer von der Form* (3. 9), *wo* c_1, c_2 *Skalaren sind, und* $b_i{}^r{}_k$ *ein Affinor dritter Stufe ist.*

Ist $S_i{}^j{}_k = 0$, d. h. sind die Übertragungsparameter symmetrisch, so kann die Beweisführung der Sätze 5 und 6 nicht unmittelbar angewandt werden, da in diesem Fall (3. 3) nicht bestehen wird. Aus der Forderung e) folgt nach dem Satz 3, daß

$$T^i{}_k = c_{k\ s}^{\ i\ t} \nabla_t v^s \tag{3. 10}$$

besteht, wenn $T^i{}_k \equiv D_k v^i$ die kovariante Ableitung von v^i bedeutet; die $c_{k\ s}^{\ i\ t}$ sind Skalaren, es ist also in zwei verschiedenen Koordinatensystemen:

$$c_{\gamma\ \delta}^{\ \alpha\ \beta} = c_{c\ d}^{\ a\ b}, \qquad (\alpha = a,\ \beta = b,\ \gamma = c,\ \delta = d). \tag{3. 11}$$

Da $T^i{}_k$ ein Affinor ist, besteht die Relation:

$$T^\iota{}_\varkappa = A^\iota_a A^b_\varkappa T^a{}_b.$$

Nach (3. 10) ist $T^\iota{}_\varkappa = c_{\varkappa\sigma}^{\iota\mu} \nabla_\mu v^\sigma$, d. h.

$$c_{\varkappa\ \sigma}^{\ \iota\ \mu} A^\sigma_s A^m_\mu \nabla_m v^s = A^\iota_a A^b_\varkappa c_{b\ s}^{\ a\ m} \nabla_m v^s,$$

da die c:: Skalaren sind. Setzen wir jetzt $A^t_\varkappa = \varrho_{(k)} \delta^t_k$ $(k = \varkappa)$ und beachten dann (3. 11), so bekommen wir wegen $A^\varkappa_t = \varrho^{-1}_{(t)} \delta^k_t$ $(k = \varkappa)$:

$$c_{k\ s}^{\ i\ m} \nabla_m v^s \varrho_{(m)} \varrho^{-1}_{(s)} = c_{k\ s}^{\ i\ m} \nabla_m v^s \varrho^{-1}_{(i)} \varrho_{(k)}$$

(nicht summieren auf m, s, i, k).

Da diese Gleichung in den $\varrho_{(t)}$ und $\nabla_m v^s$ eine Identität sein muß, hat man

$$c_{k\ s}^{\ i\ m} = c_1 \delta^i_s \delta^m_k + c_2 \delta^i_k \delta^m_s. \tag{3. 12}$$

Substituiert man diese Formel in (3. 10), so bekommt man den folgenden

Satz 7. *Die allgemeinste Form der kovarianten Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i, die die Bedingungen* a)—e) *erfüllt, ist:*

$$D_k v^i \equiv T^i_{\ k} = c_1 \nabla_k v^i + c_2 \delta^i_k \nabla_t v^t,$$

wo die c_1, c_2 beliebige Skalaren bedeuten[5]).

Für die kovarianten Vektoren kann man in ganz ähnlicher Weise verfahren. Aus der Forderung der Homogenität und Linearität folgt:

$$D_m w_k \equiv T_{km} = c_{k\ m}^{\ t\ s} \nabla_t w_s, \tag{3.13}$$

wo die $c_{k\ m}^{\ t\ s}$ wieder Skalaren bedeuten. In w_t lineare Glieder können in der Formel von T_{km} nicht vorkommen. Wäre nämlich ein Glied $d_m{}^r{}_k w_r$ in (3.13) vorhanden, wo die $d_i{}^r{}_j(x)$ Skalaren sind, so würde man nach einer Koordinatentransformation die Formel

$$d_\varkappa{}^\varrho{}_\mu w_\varrho = A^a_\varkappa A^b_\mu d_a{}^r{}_b w_r \tag{3.14}$$

bekommen. Beachtet man jetzt, daß

$$d_\varkappa{}^\varrho{}_\mu = d_k{}^r{}_m, \qquad w_\varrho = A^t_\varrho w_t \qquad (\varkappa = k,\ \varrho = r,\ \mu = m)$$

besteht, so bekommt man aus (3.14):

$$d_k{}^\varrho{}_m A^t_\varrho w_t = A^a_\varkappa A^b_\mu d_a{}^r{}_b w_r \qquad (\varkappa = k,\ \mu = m).$$

Das ist aber nur im Fall $d_k{}^r{}_m \equiv 0$ möglich, da die linke Seite in den A^t_ϱ linear, während die rechte Seite quadratisch ist. Die Transformationsformel der rein kovarianten Affinoren gibt aus (3.13):

$$c_{\varkappa\ \mu}^{\ \tau\ \sigma} A^a_\tau A^b_\sigma \nabla_a w_b = A^a_\varkappa A^b_\mu c_{a\ b}^{\ t\ s} \nabla_t w_s.$$

Nach einer Substitution $A^k_\tau = \varrho_{(t)} \delta^k_t$ $(t = \tau)$ bekommt man ebenso wie im kontravarianten Fall die Relation (3.12). Setzen wir das in (3.13), so bekommen wir den

Satz 8. *Die allgemeinste Form der kovarianten Ableitung eines kovarianten Vektors w_i, die die Bedingungen* a)—e) *erfüllt, ist:*

$$D_m w_k \equiv T_{km} = c_1 \nabla_m w_k + c_2 \nabla_k w_m,$$

wo die c_1, c_2 beliebige Skalaren bedeuten.

(Eingegangen am 27. Mai 1958.)

[5]) $\triangle_t v^t$ ist ein Skalar, der von $\partial_k v^i$ und v^i abhängig ist; c_1, c_2 bedeuten solche Skalaren, die nur von den x^i abhängig sind.

Über die Charakterisierung der Hurwitzschen Zetafunktion mittels Funktionalgleichungen.

Von MIKLÓS MIKOLÁS in Budapest.

1. Seitdem HAMBURGER vor einigen Jahrzehnten den Satz entdeckt hat, daß die Riemannsche Funktionalgleichung von $\zeta(s)$[1]) diese Funktion in der Gesamtheit der durch *gewöhnliche Dirichletsche Reihen* definierten meromorphen Funktionen nebst gewisser Ordnungsbeschränkung bis auf einen konstanten Faktor kennzeichnet[2]), ist dieses Resultat in mehreren Arbeiten behandelt bzw. weiterentwickelt worden.[3])

In dieser kleinen Notiz wollen wir zeigen, daß die aus $\sum_{n=0}^{\infty}(u+n)^{-s}$ $(0<u\leqq 1;\ \Re(s)>1)$ durch analytische Fortsetzung entstehende verallgemeinerte (Hurwitzsche) Zetafunktion $\zeta(s,u)$ sich mittels zwei leicht beweisbarer Eigenschaften, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial u}\Phi(s+1,u)=\Phi(s,u) \qquad (s \text{ beliebig}), \tag{1}$$

$$\Phi(s_1,v)*\Phi(s_2,v)|(u)=\Phi(s_1+s_2,u) \qquad (\Re(s_1),\Re(s_2)\geqq 1)^{4)} \tag{2}$$

mit $\Phi(s,u)=\Gamma(s)^{-1}\bar{\zeta}(1-s,u)$ eindeutig charakterisieren läßt; hierbei bezeichnet $\bar{\zeta}(s,u)$ diejenige Funktion von u mit der Periode 1, welche in $0<u\leqq 1$ mit $\zeta(s,u)$ übereinstimmt. ($\Phi(s,u)$ ist ersichtlich eine *ganze* Funktion von s.) Wir bemerken, daß man zur Charakterisierung nebst (1) und (2) nur passende Differenzierbarkeitsbedingungen braucht, *ohne* die Einschränkung, daß die betreffende Funktion durch eine Dirichletsche Reihe erklärt ist bzw. einer Abschätzungsformel genügt.

---

1) Für einen einfachen Beweis vgl. [6].

2) S. [3].

3) Vgl. z. B. [1], [2], [4], [8], [9].

4) Es ist die sog. Hurwitzsche Formel (14) für $\zeta(s,u)$ anzuwenden; vgl. [5]; [10], S. 269. — Wir benutzen die übliche Bezeichnung der *Faltung* (über (0, 1)): $f_1(v)*f_2(v)|(u)=$ $=\int_0^1 f_1(v)f_2(u-v)\,dv$, wobei — wie durchwegs in dieser Arbeit — das Integral in *Lebesgueschen Sinne* zu verstehen ist.

2. Wir behaupten den folgenden

Satz. *Es sei* $\Phi(s,u)$ *eine ganze Funktion der komplexen Variablen* s *und eine nach* 1 *periodische, in* $(0,1)$ *differenzierbare Funktion der reellen Veränderlichen* u, *welche für* $s>1$ *zur Klasse* $\mathrm{Lip}_K 1$ *(*K *unabhängig von* u*) gehört. — Wir nehmen an, daß die Funktionalgleichungen* (1) *und* (2) *für* $1<s<2$ *bzw.* $1<s_1, s_2<2$ *und für* $u\in(0,1)$ *gelten, ferner, daß die komplexen Fourierkoeffizienten* $c_n(s)$ *von* $\Phi(s,u)$ *inbezug auf* $0<u<1$ *für* $n>0$ *in* $1<s<2$ *nicht identisch verschwinden und die Bedingung* (*) $|\arg c_n(s)|<\pi$ *erfüllen.*

Dann hat man für alle s *und* $0<u<1$

$$\Phi(s,u)\equiv\Gamma(s)^{-1}\zeta(1-s,u).^{5)} \tag{3}$$

Beweis. 1° Es sei $1<s<2$.

Da wir u. a. die Lipschitz-Bedingung

$$|\Phi(s+\Delta s,u)-\Phi(s,u)|\leqq K|\Delta s| \quad (u \text{ beliebig reell, } |\Delta s| \text{ genügend klein}) \tag{4}$$

angenommen haben, so ist $\Phi(s,u)$ auch für $u=0$, $u=1$ stetig und die Existenz von

$$c_n(s)=\int_0^1 \Phi(s,v)e^{-2n\pi i v}dv \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{5}$$

ist gesichert; wegen der *Differenzierbarkeit* von $\Phi(s,u)$ in $0<u<1$ gilt hier die Fouriersche Darstellung

$$\Phi(s,u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(s)e^{2n\pi i u}. \tag{6}$$

Andrerseits, mit Rücksicht auf (1) und die (aus unseren Voraussetzungen folgende) Vollstetigkeit von $\Phi(s+1,u)$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\Phi(s+1,u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2n\pi i\cdot c_n(s+1)e^{2n\pi i u} \qquad (0<u<1). \tag{7}$$

(6), (7) und (1) implizieren nach dem Unizitätssatz von HEINE—CANTOR[6]) die Beziehungen

$$c_n(s)=2n\pi i\cdot c_n(s+1) \qquad (n=0,1,2,\ldots); \tag{8}$$

insbesondere für $n=0$:

$$c_0(s)\equiv 0. \tag{9}$$

2° Die Faltung in (2) ist für $1<s<2$ offenbar vorhanden und gestattet die folgende komplexe Fourierentwicklung:

$$\Phi(s_1,v)*\Phi(s_2,v)|(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(s_1)c_n(s_2)e^{2n\pi i u} \qquad (0<u<1); \tag{10}$$

---

[5]) Für $s=0$ ist natürlich der entsprechende Grenzwert zu verstehen: $\Phi(0,u)\equiv-1$

[6]) Vgl. z. B. [7], S. 116—119.

eine Reihe, welche — gemäß (2) — mit derjenigen in (6) (mit s_1+s_2 anstatt s) identisch übereinstimmen soll. Das liefert

$$c_n(s_1)c_n(s_2)=c_n(s_1+s_2), \tag{11}$$

also eine bekannte *Cauchysche Funktionalgleichung* für $c_n(s)$ $(n=1,2,\ldots)$ mit $1<s_1, s_2<2$.

Da $c_n(s)$ für $s\in(1,2)$ auf Grund von (4) trivial *stetig* ist, und ihr identisches Verschwinden ausgeschlossen wurde, ergibt sich als Lösung

$$c_n(s)=e^{A_n s} \tag{12}$$

mit einer beliebigen komplexen Konstanten A_n.

3° Setzt man dies in (8) ein und beachtet die Bedingung (*), so bestimmt sich $c_n(s)$ eindeutigerweise:

$$c_n(s)=e^{s\left[-\ln(2n\pi)-i\frac{\pi}{2}\right]}=(2n\pi i)^{-s} \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{13}$$

wobei also der Hauptwert der Potenz zu verstehen ist.

Die gleichzeitige Benützung von (6), (9), (13) und der Hurwitzschen Formel

$$\zeta(s,u)=2\Gamma(1-s)\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{s-1}\sin\left(2n\pi u+\frac{\pi s}{2}\right) \quad (\Re(s)>0;\ 0<u\leqq 1) \tag{14}$$

liefert nun unmittelbar[7])

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(s,u)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'(2n\pi i)^{-s}e^{2n\pi i u}=\\ &=2\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{-s}\cos\left(2n\pi u-\frac{\pi s}{2}\right)=\Gamma(s)^{-1}\zeta(s,u)\end{aligned}\right. \tag{15}$$

und zwar, wegen der Holomorphie von $\Phi(s,u)$ nicht nur für $1<s<2$, sondern auf der ganzen s-Ebene. Q. e. d.

3. Es sei noch erwähnt, daß (1) und (2) für $s=p$ $(p=0,1,\ldots)$ bzw. für $s_1=\lambda$, $s_2=\mu$ $(\lambda,\mu=1,2,\ldots)$ mit den Formeln

$$\left.\begin{aligned} &B'_{p+1}(u)=B_p(u) && (16)\\ &\int_0^1 B_\lambda(v)\,\overline{B}_\mu(u-v)\,dv=B_{\lambda+\mu}(u) && (17)\end{aligned}\right\}\quad (0<u<1)$$

äquivalent sind, wo $B_p(u)$ das Bernoullische Polynom p-ten Grades, $\overline{B}_p(u)$ die mit $B_p(u)$ in (0, 1) übereinstimmende, nach 1 periodische Funktion bezeichnet.

---

[7]) Der Strich neben dem Summenzeichen in (15) bedeutet, wie üblich, daß man das Glied mit $n=0$ überspringen soll.

Wie man weiß, (16) und die Annahme

$$\int_0^1 B_p(v)\,dv = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{18}$$

determinieren vollständig das System der Bernoullischen Polynome; der soeben bewiesene Satz ist als ein „transzendentes", passend erweitertes Gegenstück dieser elementaren Tatsache anzusehen.

Literaturverzeichnis.

[1] S. Bochner und K. Chandrasekharan, On Riemann's functional equation, *Ann. of Math.*, (2) **63** (1956), 336—360.

[2] K. Chandrasekharan und S. Mandelbrojt, Sur l'équation fonctionnelle de Riemann, *Comptes Rendus Paris*, **242** (1956), 2793—2796.

[3] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion, *Math. Zeitschrift*, **10** (1921), 240—254; **11** (1922), 224—245; **13** (1922), 283—311.

[4] H. Hamburger, Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind, *Math. Annalen*, **85** (1922), 129—140.

[5] M. Mikolás, Mellinsche Transformation und Orthogonalität bei $\zeta(s, u)$; Verallgemeinerung der Riemannschen Funktionalgleichung von $\zeta(s)$, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 143—164.

[6] M. Mikolás, A simple proof of the functional equation for the Riemann zeta-function and a formula of Hurwitz, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 261—263.

[7] W. Rogosinski, *Fouriersche Reihen* (Berlin—Heidelberg, 1930).

[8] C. L. Siegel, Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, *Math. Annalen*, **86** (1922), 276—279.

[9] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function* (Oxford, 1951).

[10] E. T. Whittaker und G. N. Watson, *A course of modern analysis*, vierte Auflage (Cambridge, 1952).

(Eingegangen am 23. Oktober 1958.)

Correction to my paper "Systems of equations over modules".*)

By A. KERTÉSZ in Debrecen.

L. KOVÁCS has kindly called my attention to the fact that in the solving formula occurring in Theorem 8 of my paper (*) the parameters cannot be chosen quite arbitrarily. As a consequence Corollaries 1 and 2 of Theorem 8 also loose their validity. Here we are giving the appropriate correction.

Let R be a semi-simple ring and $[M, \varphi]$ a compatible system of equations

(1) $$f_\beta(\ldots, x_\alpha, \ldots) = g_\beta \qquad (\in G;\ \alpha \in A;\ \beta \in B)$$

over the unitary R-module G_1.[1]) If F is the free unitary R-module generated by the free generators $x_\alpha\,(\alpha \in A)$ then by Lemma 5 of (*) a direct representation

(2) $$F = M + N$$

holds, where

(3) $$N = \sum_{\delta \in D} \{s_\delta x_\delta\} \qquad (s_\delta \in R)$$

D being a subset of the index set A. By the proof of Theorem 7 in (*) there exists a solution

(4) $$x_\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha \in A)$$

of the system of equations (1), c_α being a linear combination over R of a finite number of the g_β's.

Consider now the homogeneous system $[M, \psi]$ of equations corresponding to the system $[M, \varphi]$, i. e. let $M\psi = 0$. In order to get all solutions of this system we construct all possible R-homomorphisms $\overline{\psi}$ of the free unitary R-module F into G_1 for which

(5) $$M\overline{\psi} = 0$$

holds. In view of (2) and (3) $\overline{\psi}$ is determined by the images

(6) $$(s_\delta x_\delta)\overline{\psi} = h_\delta\,(\in G_1;\ \delta \in D)$$

---

*) *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 207—234. In the sequel this paper will be denoted by (*).

[1]) We are using the notations and terminology of the paper (*).

where $O(h_\delta) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$.[2]) On the other hand any system of elements $h_\delta (\in G_1, \delta \in D)$ for which $O(h_\delta) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$, induces with ψ by (6), (3) and (2) an R-homomorphism $\overline{\psi}$ of F into G_1 with (5). Since, by (2) and (3) there holds a representation

(7) $$x_\alpha = m_\alpha + \sum_{\delta \in D} d_{\alpha\delta} (s_\delta x_\delta) \qquad (m_\alpha \in M;\ d_{\alpha\delta} \in R)$$

for the elements $x_\alpha (\in F;\ \alpha \in A)$,[3]) it follows moreover from (6) and (5) that all solutions in G_1 of the homogeneous system $[M, \psi]$ of equations are obtained from the formulae

$$b_\alpha = x_\alpha \overline{\psi} = \sum_{\delta \in D} d_{\alpha\delta} h_\delta,$$

where the parameters h_δ running over G_1 are subjected only to the conditions $O(h_\delta) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$. Taking into account the fact that (4) is one of the solutions of the system of equations (1) we obtain

Theorem 8. *If R is a semi-simple ring, then any compatible system $[M, \varphi]$ of equations* (1) *over the arbitrary unitary R-module G_1 possesses a solution in G_1 and all solutions in G_1 can be obtained by the system of formulae*

(8) $$x_\alpha = c_\alpha + \sum_{\delta \in D} d_{\alpha\delta} h_\delta,$$

where the parameters h_δ run over G_1, being bound only to fulfil the conditions $O(h_\delta) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$ $(\delta \in D)$; the constants s_δ, $d_{\alpha\delta} (\in R)$ are defined by (3) *and* (7) *resp. (depending on the direct representation* (2)*), and the constants $c_\alpha (\in G_1)$ are (finite) linear combinations over R of the elements g_β standing on the right-hand side of the equations* (1).

In the special case $G_1 = R_{(R)}$ we have

Corollary 1. *An arbitrary compatible system of linear equations over a semi-simple ring is solvable in the ring and all solutions are yielded by the system of formulae* (8).

Another immediate consequence of Theorem 8 is

Corollary 2. *If R is a semi-simple ring, then a compatible system $[M, \varphi]$ of equations over an arbitrary unitary R-module G_1 admits exactly one solution in G_1 if and only if for a direct representation* (2) *with* (3) *and for all elements $h (\in G)$ and all indices $\delta (\in D)$ the relation $O(h) \supseteq O(s_\delta x_\delta)$ implies $h = 0$.*

(Received September 22, 1958.)

---

[2]) If y is an element of an R-module, then $O(y)$ denotes the set of all those elements r of R for which $ry = 0$. $O(y)$ is always a left ideal of R.

[3]) Naturally for a (fixed) α there are but a finite number of δ's for which $d_{\alpha\delta} \neq 0$.

Bibliographie.

N. Bourbaki, Eléments de mathématique; première partie: **Les structures fondamentales de l'analyse;** livre III: **Topologie générale** [Actualités scientifiques et industrielles, fascicules 858 (= 1142 en deuxième éd.), 916 (= 1143 en deuxième éd.), 1029, 1045 (deux éditions), 1084 et 1196], 187 + 158 + 131 + 169 + 101 + 94 pages, Paris, Hermann & Cie, 1940 à 1953, les trois fascicules en deuxième édition: 1951, 1951, 1958.

„Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes." „L'objet principal de cette première partie ... est de donner des fondations solides à tout le reste du traité, et même à tout l'ensemble des mathématiques modernes."

Ces mots, bien familiers à tous ceux qui ont pris la peine d'étudier le „Mode d'emploi de ce traité" joint à chacun des fascicules de la série Bourbaki, expriment de façon concise l'esprit et le but des scientistes se dissimulant sous ce pseudonyme. Donner des fondations solides à tout l'ensemble des mathématiques: ce fut un Euclide qui se donna, avant plus de deux mille ans, cette tâche, et nous admirons de nos jours d'une admiration inchangée le chef d'oeuvre de l'esprit antique né en conséquence de cette résolution. Mais, depuis le temps d'Euclide, l'extension des sciences mathématiques s'est multipliée et se multiplie constamment, de sorte qu'une tentative d'édifier tout le bâtiment des mathématiques modernes, à partir des fondements et sans lacunes logiques, semble, à première vue, n'avoir aucune chance de succès. Pourtant, le développement continu des mathématiques, tout en donnant naissance incessamment à de nouvelles branches de science, crée de temps en temps de nouvelles méthodes qui servent à traiter d'une manière unifiée des sujets qui, précédemment, ne semblaient posséder aucune connexion. De cette façon, le succès d'une entreprise telle que celle de la série Bourbaki n'est pas inaccessible, du moins dans ces parties des mathématiques qui ont obtenu jusqu'à nos jours un fondement axiomatique sans lacune.

Or, dans la plupart des branches axiomatisées des mathématiques modernes, l'axiomatisation s'effectue relativement à un système d'axiomes (restant d'ailleurs le plus souvent sans fixation précise) de la Théorie des ensembles. En particulier, c'est la voie suivie par le traité de Bourbaki: après avoir résumé les définitons fondamentales et les théorèmes qui s'y rattachent de la Théorie des ensembles dans un "fascicule de résultats", le livre II développe la théorie des structures algébriques, dont les notions et les résultats servent, auprès de ceux de la Théorie des ensembles, à développer la théorie des structures topologiques dans le livre III.

On suppose donc que le lecteur qui commence à étudier la Topologie générale connaît une partie considérable de la Théorie des ensembles et de l'Algèbre, en particulier que la notion des nombres rationnels lui est familière, mais la connaissance des nombres réels n'est pas exigée (une analogie de plus entre les traités d'Euclide et de Bourbaki), par contre, la théorie des nombres réels doit être développée au courant du développement de la théorie des structures topologiques. Or, on sait très bien que l'ensemble des nombres réels joue un rôle très important dans la topologie générale: d'une part, c'est l'espace des nombres réels (muni de la topologie dite naturelle) et les espaces qui s'en obtiennent, par des passages à des sous-espaces et des constructions d'espaces produits, qui fournit les plus importants exemples d'espaces topologiques, intervenant comme espaces universels pour des classes étendues d'espaces, de l'autre, la notion de nombres réels est évidemment indispensable pour définir les espaces métriques (ou pour définir une structure uniforme au moyen d'une famille d'écarts).

Pour trancher les difficultés qui résultent du manque de la notion de nombres réels, on pourrait certainement commencer par le développement de la théorie de ceux-ci, comme le fait la plupart des traités d'Analyse, en suivant soit la méthode de Cantor—Méray, soit celle de Dedekind. Cependant, on présenterait ainsi, dans un cas particulier, une construction (à savoir la complétion d'un anneau topologique) qui devra être reprise plus tard dans une forme plus générale, et c'est précisément cet ordre d'idées qui est complètement étranger à l'esprit du traité de Bourbaki, préférant de „procéder du général au particulier". L'auteur renonce donc à suivre cette voie et, par conséquent, n'introduit les nombres réels que dans le Chapitre IV, après avoir traité la complétion des structures uniformes, en particulier des groupes et des anneaux topologiques, tandis que l'application des nombres réels en topologie, par exemple la définiton des espaces métriques, ne se fait qu'au courant du Chapitre IX. Cet ordre de chapitres adopté par l'auteur a pour conséquence que, pour la plupart des notions introduites dans les premiers chapitres, on ne peut citer que des exemples banaux (p. ex. pour la notion d'espace connexe celui de l'espace réduit à un seul point), complétés quelquefois par une promesse (marquée par des astérisques) de montrer plus tard des exemples moins banaux.

Le Chapitre I introduit les notions fondamentales qui se rattachent à la notion de structure toplogique. Du labyrinthe des systèmes d'axiomes très variés, présentant des termes primitifs de toutes sortes de nature, l'auteur choisit avec succès celui se fondant sur l'idée des ensembles ouverts et équivalent au système d'axiomes du traité d'Alexandroff et Hopf. De même, la série très étendue des axiomes de séparation est réduite à l'axiome de Hausdorff et à l'axiome de régularité. Comme généralisation de la notion de suites qui, tout en étant très utile dans l'étude des espaces métriques, perd son importance lorsqu'on passe à des espaces topologiques généraux, on introduit d'après H. Cartan la notion de filtres et on l'applique à l'étude des limites. On introduit ensuite les produits des espaces topologiques et les espaces quotients. Le chapitre se termine par une étude approfondie des espaces compacts (c'est-à-dire des espaces de Hausdorff bicompacts), des espaces localement compacts et des espaces paracompacts, et par un coup d'oeil sur les espaces connexes.

Le Chapitre II est consacré à l'étude des espaces uniformes. Ces espaces, dont l'introduction est due à A. Weil, se sont montrés une généralisation très utile des espaces métriques. Après l'introduction des filtres de Cauchy, on définit les espaces uniformes complets et on construit, à partir d'un espace uniforme quelconque, le complété de cet espace à l'analogie de la complétion d'un espace métrique. On étudie ensuite la structure uniforme des espaces compacts et les produits des espaces uniformes.

Le Chapitre III s'occupe des éléments de l'Algèbre topologique, notamment de la théorie élémentaire des groupes, anneaux et corps topologiques. Le fait que la structure algébrique d'un groupe topologique permet de définir sur ce groupe des structures uniformes compatibles avec la topologie du groupe, nous conduit à étendre aux groupes et aux anneaux topologiques l'opération de complétion. C'est par l'application de ces résultats qu'on introduit, dans le Chapitre IV, les nombres réels en complétant l'anneau des nombres rationnels. On établit ensuite les propriétés topologiques fondamentales de l'espace des nombres réels, puis on introduit (par l'adjonction des symboles $\pm\infty$) la droite numérique achevée et on étudie les notions fondamentales de la théorie des fonctions réelles d'une variable réelle.

Le Chapitre V traite des groupes à un paramètre; on y établit une proposition auxiliaire très générale qui, d'une part, permet de caractériser le groupe additif des nombres réels et celui des rotations du cercle, et qui, de l'autre, sera utilisée plus tard à fonder la mesure des angles. On étudie ensuite l'isomorphie du groupe additif des nombres réels et de celui multiplicatif des nombres positifs à l'aide des exponentielles et des logarithmes.

Les Chapitres VI et VII sont consacrés à l'étude des propriétés topologiques et algébriques des espaces euclidiens à n dimensions. On y trouve auprès des résultats de caractère élémentaire quelques notions et théorèmes de nature plus profonde, comme par exemple les espaces projectifs ou le théorème de Kronecker sur l'approximation diophantienne.

Dans le Chapitre VIII, on introduit les nombres complexes et on se sert de l'isomorphie du groupe multiplicatif des nombres complexes de valeur absolue 1 et de celui des rotations du cercle à établir la mesure des angles, puis à introduire les fonctions trigonométriques.

Le Chapitre IX retourne aux idées de la topologie générale en y utilisant cette fois-ci les nombres réels. On y établit la possibilité de définir une structure uniforme quelconque au moyen d'une famille d'écarts, puis on introduit la notion d'espace métrique et on étudie quelques propriétés fondamentales de ceux-ci. On définit ensuite les notions de corps valué et d'espace normé sur un corps valué, puis on étudie les espaces normaux, en montrant que la notion d'espace paracompact s'intercale entre celles d'espace métrisable et d'espace normal, enfin on introduit la notion d'espace de Baire, en appelant ainsi un espace où le complémentaire d'un ensemble maigre (c'est-à-dire de première catégorie) est dense, en démontrant que tout espace localement compact, de même que tout espace métrique complet jouit de cette propriété. Ce chapitre se termine (dans la deuxième édition) par l'étude des espaces homéomorphes à un espace métrique séparable et complet (appelés "espaces polonais"), en particulier de la théorie des ensembles boréliens et analytiques en établissant une généralisation du théorème sur la mesurabilité de ces derniers.

Le dernier chapitre est consacré aux espaces fonctionnels; l'utilité de la notion d'espace uniforme est supportée de nouveau par le fait que les notions de convergence uniforme et des types de convergence analogues peuvent être fondées, même d'une façon plus naturelle, sur les espaces uniformes au lieu des espaces métriques. A titre d'application, on démontre le théorème de Stone sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes.

Cet aspect général sur les sujets principaux traités dans l'ouvrage montre qu'il s'agit des idées fondamentales de la topologie générale, de l'algèbre topologique, de la théorie des fonctions réelles et de l'analyse fonctionnelle. Mais ce résumé serait essentiellement incomplet si nous ne faisions pas mention des exercices qui suivent chaque paragraphe. Dans ceux-ci, on trouve des exemples illustrant les notions introduites, des contre-exemples montrant la nécessité de certaines hypothèses ou l'indépendance de certains axiomes, des notions dont le texte principal ne s'occupe pas, et toute une foule de théorèmes de topologie plus ou moins importants. On sent même parfois que le titre "Exercices" est un abus de langage, lorsqu'on y rencontre, par exemple, le théorème de métrisation de Nagata—Smirnov.

Chacun des chapitres est suivi d'une Note historique; le lecteur y trouve non seulement d'excellents résumés du développement des idées dont s'occupe le chapitre en question, mais aussi des renseignements sur la connexion des ordres d'idées quelque fois inhabituels du traité aux systèmes habituels de la fondation des mêmes sujets. Le fascicule de résultats, qui énumère les définitions et les théorèmes sans démonstrations, est de même caractère: il ne suit plus l'ordre systématisant et plein de détours forcés des chapitres précédents, mais résume les sujets d'après leurs relations naturelles et mentionne même quelques résultats qui n'étaient pas touchés dans le texte. Enfin, un dictionnaire qui se trouve à la fin du livre réussit à créer l'harmonie entre la terminologie du traité et de celle des autres ouvrages sur la topologie générale. Faute de ces liens, le lecteur du traité risquerait de perdre le contact à la littérature courante, mais l'existence de ceux-ci le protège de ce danger; cependant, un nombre bien plus élevé (et non se bornant aux Notes historiques) de renvois à la littérature contribuerait sans doute encore davantage à l'éviter.

Lorsqu'il s'agit d'un traité dont les buts et les méthodes diffèrent si essentiellement de ceux de tout autre ouvrage sur le même sujet, on ne doit pas s'étonner que l'on trouve des points à discuter. En dehors des remarques faites plus haut à propos de l'introduction tardive des nombres réels, on pourrait demander, par exemple, s'il est nécessaire d'apprendre au lecteur les propriétés des espaces projectifs avant de lui faire connaître la notion d'espace métrique, on pourrait demander en général si le rôle des espaces métriques en topologie n'est pas sous-estimé dans le traité, on pourrait songer s'il n'était pas meilleur de donner le rôle fondamental joué par les filtres aux bases de filtres plutôt, cette notion étant invariante vis-à-vis d'un plus grand nombre d'opérations, on pourrait désirer que l'on fonde la théorie des espaces quotients, afin de la rendre plus imagée, plutôt sur la notion de partition que sur celle de relation d'équivalence, on pourraít discuter la terminologie, ce n'est pas qu'elle est inconséquente, mais qu'elle diffère quelquefois de la terminologie adoptée par la plupart des auteurs même si cela n'est pas nécessaire (cf. p. ex. le mot cercle), mais toutes ces questions sont de second ordre. Ce qui est essentiel, c'est le fait incontestable que le traité de Topologie générale a réussi à réaliser son but: le lecteur y trouve un exposé systématique et sans lacune logique des fondements de la topologie et de l'analyse mathématique.

Presque vingt ans se sont écoulés depuis la parution du premier fascicule de la Topologie générale de Bourbaki, et il y en a cinq que la série s'est complétée en sa première édition. Pendant ces années, toute une série de notions traitées pour la première fois de façon conséquente dans l'ouvrage de Bourbaki, en premier lieu celle d'espaces uniformes, sont devenues familières non seulement à tous les spécialistes en topologie, mais à une classe bien plus étendue de mathématiciens. Ce n'est pas un jugement inconsidéré d'attribuer ce fait à l'influence de ce traité. On n'a qu'à consulter les ouvrages sur la topologie générale parus dans les dernières années, par exemple la monographie de J. L. Kelley ou la dernière édition du traité de C. Kuratowski, pour pouvoir constater que les auteurs de ces ouvrages, bien que par d'autres méthodes et dans d'autres buts, suivent le développement des idées fondamentales de la topologie, auquel le traité de Bourbaki a très considérablement contribué.

Á. Császár (Budapest)

Wolfgang Haack, Elementare Differentialgeometrie (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. XX), VIII+239 Seiten, Basel, Verlag Birkhäuser, 1955.

Der Zweck des Verfassers ist ein einführendes Lehrbuch der Differentialgeometrie zu geben, welches die Methode von Elie Cartan folgt. Um die Schwierigkeiten herabzusetzen, die diese Methode dem Studierenden anfangs bereitet, wird die Theorie der Raumkurven und Flächen zuerst im Sinne von Gauss entwickelt (Kapitel II und IV—VIII). Dieser Teil des Buches enthält die Elemente der Differentialgeometrie umgefähr mit dem üblichen Inhalt. Mit Rücksicht auf die Anwendungen in der Kartographie werden die Abbildungen zweier Flächen aufeinander ausführlich behandelt. In diesen Kapiteln ist die Darstellung knapp, wodurch jedoch die Lesbarkeit nicht gefährdet wird; der Ausgangspunkt für die Untersuchungen ist nämlich die geometrisch anschauliche Vorstellung. An einigen Stellen begegnet man aber nicht ganz einwandfreien Überlegungen. Verf. nimmt z. B. zur Betrachtung der geodätischen Linien die der kürzesten Linie nahe laufenden Kurven in der Form $\bar{\mathfrak{x}}(t) = \mathfrak{x}(t) + \varepsilon\lambda(t)[\dot{\mathfrak{x}} \times \mathfrak{N}]$ an (S. 103), wo $\mathfrak{x}(t)$ die kürzeste Linie, $\mathfrak{N}$ die Flächennormale, $\lambda(t)$ eine beliebige (stetig differenzierbare) Funktion und ε ein Parameter ist. Im allgemeinen braucht aber $\bar{\mathfrak{x}}(t)$ nicht auf der Fläche zu liegen. Ein ähnlicher Fehler steckt im „Beweis" der offenbar falschen Behauptung: wenn eine Fläche und eine Kurve sich in n-ter Ordnung berühren, dann hat die Kurve $n+1$ infinitesimal benachbarte Punkte mit der Fläche zusammen (S. 22).

Nachdem die wichtigsten elementaren Ergebnisse der Differentialgeometrie dargelegt werden, wird die Theorie nochmals nach den Ideen von Cartan dargestellt: es werden zuerst die ein- und zweiparametrigen Dreibeinscharen untersucht, und die Differentialgeometrie der Raumkurven und Flächen ergibt sich dann durch gewisse Spezialisierungen dieser Scharen.

In Kapitel III, das die Theorie der einparametrigen Dreibeinscharen bringt, wird bewiesen, daß die Differentialgeometrie der Raumkurven als Sonderfall in derjenigen der Streifen enthalten ist.

Kapitel IX—X führen weit über die Elemente hinaus; zu ihrem Verständnis sind einige Kenntnisse aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen notwendig. Kapitel IX ist den zweiparametrigen Dreibeinmannigfaltigkeiten gewidmet. Kapitel X beschäftigt sich mit dem Fundamentalsatz der Flächentheorie, der Realisierung einer gegebenen Metrik und Biegungsproblemen.

Ein sorgfältig zusammengestelltes Literaturverzeichnis ergänzt das schön ausgestattete Buch.

T. Szerényi (Szeged)

Henri Arzeliès, Etudes relativistes: La cinématique relativiste, XI + 228 pages, **La dynamique relativiste et ses applications,** Fasc. I, XXI + 304 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1955 et 1957.

Der 1955 erschienene, dem Andenken von Einstein gewidmete erste Band führt den Leser in origineller Art in die relativistische Kinematik ein. Um die Theorie zum Experimentellen nahe zu bringen, gibt der Verf. im ersten Teil einen ausführlichen Überblick über die metronomischen Probleme und Ergebnisse der Längenmessung, wie auch über die Grundsätze und Methoden der Zeitmessung. Nachher befaßt er sich mit der Untersuchung der Bezugssysteme, zum Schluß werden die strukturellen Anforderungen der physikalischen Theorien zusammengefaßt. Die Diskussion wird mit zahlreichen wissenschaftshistorischen Rückblicken abwechslungsreicher gestaltet. Der zweite Teil des Bandes beginnt mit der Diskussion der Lorentz-Transformation. In der Folge wird die Bestimmung der Meßzahlen von Distanzen, Zeitintervallen, Winkeln und Volumina vom Standpunkt eines beweglichen Bezugssystems aus erörtet. Dann befaßt sich der Verf. mit den Transformationseigenschaften der Geschwindigkeit und der Beschleunigung, und bespricht das sich auf eine rotierende Drehscheibe beziehende Paradoxon von Ehrenfest sowie das Uhrenparadoxon, geht auf die Diskussion des Problems der rotierenden Scheibe über, und bestimmt in origineller Art die an der rotierenden Scheibe herrschende Geometrie. Am Ende wird der Aufbau des Minkowskischen Kontinuums vorgelegt. Die Erörterungen des Verfassers sind sehr anziehend auch deswegen, da er überall auch den Standpunkt der dem relativistischen gegenüberstehenden anführt. Es ist bedauerlich, daß die interessanten und prinzipiell wichtigen Ergebnisse der relativistischen Kinematik der starren Körper, wie z. B. die bahnbrechenden Arbeiten von M. Born, keinen Platz im Band erhielten.

Im vorliegenden, dem Andenken von Maxwell und Lorentz gewidmeten ersten Heft der „Relativistischen Dynamik mit Anwendungen" behandelt Verf. die Dynamik des sich langsam beschleunigenden Punktes, und wendet das Prinzip der speziellen Relativität auf die Wechselwirkung von elektrischen Ladungen an. Dementsprechend besteht das Heft aus zwei Teilen. Der erste Teil beginnt mit den Newtonschen Grundgleichungen der Dynamik in der Lorentzkovarianten Formulierung, geht auf die relativistische Verallgemeinerung des dynamischen Energiesatzes über und vergleicht die verschiedenen Wege der relativistischen Verallgemeinerung der Punktdynamik. Dann beschäftigt er sich mit den Transformationseigenschaften der grundsätzlichen Größen der Mechanik (Kraft, Impuls, Energie, etc.) und bettet die Ergebnisse in das Minkowskische Kontinuum. Dem sogenannten Lorentzschen Kraftgesetz ist ein separater Abschnitt gewidmet. In einem späteren Abschnitt findet man die Dynamik eines sich in einem — vom Verf. skalar genannten — Potentialraum bewegenden Punktes vor. Hier beschäftigt er sich mit dem Wellen-Korpuskel-Dualismus, gibt hier z. B. auch die korpuskulare Interpretation des Doppler-Effekts. Dann werden die relativistischen Eigenschaften des mit den elektromagnetischen Potentialen charakterisierbaren Kraftfeldes behandelt. Ein Abschnitt behandelt die Variationsprinzipe und in diesem Rahmen die relativistische Verallgemeinerung der Lagrangeschen sowie der Hamiltonschen Mechanik. Der folgende Abschnitt leitet die kovarianten Gleichungen des Kraftfeldes mit Hilfe einer Variationsmethode ab. Es wird gezeigt, wie die Größen des elektromagnetischen Feldes in das Minkowskische Kontinuum einzusetzen sind. Ein besonderer Abschnitt wird der Begriffsanalyse der Kraft und der Masse gewidmet.

Der zweite Teil des Bandes beginnt mit der relativistischen Verallgemeinerung des Coulombschen Gesetzes. Der Verf. durchführt die Verallgemeinerung über die charakteristischen Entwickelungsstufen der Punktelektrodynamik und bestimmt auf Grund der erhaltenen Ergebnisse das elektromagnetische Feld einer sich gleichmäßig bewegenden Ladung. Diese Berechnung ist auch auf die Bewegung von mehreren Ladungen verallgemeinert. Der letzte Abschnitt behandelt die Maxwell-Lorentzsche Theorie des elektromagnetischen Feldes in Lorentz-kovarianter Form.

Mit Bedauern muß bemerkt werden, daß in diesem, übrigens sehr weitblickenden Werk manche bemerkenswerte Ergebnisse, darunter auch diejenigen einiger ungarischer Forscher unerwähnt blieben.

T. Mátrai (Budapest)

J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, *Erster Teil:* Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. — *Zweiter Teil:* Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden. — *Dritter Teil:* Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur französischen Revolution (Sammlung Goschen, Bande 226, 875, 882), 200 + 109 + 107 S., Berlin, Walter de Gruyter, 1953, 1957, 1957.

Das Ziel des Verf. ist einen Gesamtüberblick über die Geschichte der Mathematik zu geben. Die antike Mathematik ist sehr gedrangt dargestellt, um die bisher zu wenig beachtete Entwicklung der Mathematik im Mittelalter und in der Renaissance ausführlicher behandeln zu konnen. Der Verf. hat die einschlägigen neuesten Forschungsergebnisse überall mit dem Ziel behandelt, den Zusammenhang zwischen den großen Geistesströmungen der Weltgeschichte und der Entwicklung der Mathematik klar darstellen zu können. Es ist erstaunlich, wie viele Gedanken und Daten in einem so engen Rahmen entwickelt wurden. Ein besonderer Vorzug des ganzen Werkes ist die ausführliche, sehr genau und übersichtlich ausgearbeitete Bibliographie. Dem Verf., der seinen Namen schon durch zahlreiche wertvolle Einzeldarstellungen aus verschiedenen Gebieten der Geschichte der Mathematik bekannt gemacht hat, und auch dem Verlage soll für die Herausgabe dieser Bände Dank gesagt werden.

Inhaltsübersicht. *Erster Teil:* Vorgriechische Mathematik. Die Griechen. Mittelalter. Humanismus. Frühbarock. — *Zweiter Teil:* Hochbarock. Spätbarock. — *Dritter Teil:* Spätbarock (Fortsetzung). Aufklärung. Führende mathematische Persönlichkeiten.

I. Kállai (Szeged)

Einar Hille and Ralph S. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXXI), XXVI + 808 p., Providence, R. I., American Mathematical Society, 1957.

It is difficult to do in a few words the review of such a monumental book as the „Functional Analysis and Semi-Groups" by Hille and Phillips. The authors succeeded in giving a selfcontained presentation of the theory of semi-groups, following the ideas and the lines of the first edition, written by Hille *), but containing also all the recent contributions (especially those of R. S. Phillips). In this new edition, the algebraic tools have a more important place; to this aim, Gelfand's representation theory of commutative Banach algebras is studied in Chapter IV, together with some special Banach algebras of functions which have great interest in the spectral theory of semi-groups.

The book is divided into five parts. The first, intitled „Functional Analysis", can be considered as the most complete existing monography on Banach spaces and algebras. The clearness of the exposition makes also this first part to be of very great use to those who are interested in general in Functional Analysis. It contains six chapters: Abstract spaces, Linear transformations, Vector valued functions, Banach algebras, Analysis in Banach algebras, and Laplace integrals and binomial series. The chapter which was most augmented is Chapter V (in which we find for example, also A. Taylor's operational calculus for unbounded closed operators). All the other chapters (excepting the fourth, which is completely new) follow the line of the first edition, but are extended and completed.

The second part of the book, „Basic properties of semi-groups", covers the first half of the old part II. Much new material is contained in Chapter XII, on the generation of semi-groups, in which necessary and sufficient conditions are given that an unbounded operator be the infinitesimal generator of a semi-group of operators. This problem, first settled by Hille (the first edition, Ch. XII) and K. Yosida (*Journ. Math. Soc. Japan*, **1** (1948) 15-21), was developed since especially by Phillips and Miyadera. It is studied here in correlation with Phillips' classification of semi-groups.

The third part („Advanced Analytical Theory of Semi-Groups") is largely new. It contains Phillips' main contributions to the theory (perturbation theory, operational calculus, and spectral theory). Some brief indications on these questions are perhaps necessary. In perturbation theory, the first problem is the invariance under perturbation of the basic classes of semi-groups. The continuous dependence of the semi-groups from their infinitesimal generators is obtained in an ingenious way, by introducing a special metric in all

*) A review of the first edition appeared in *Acta Sci. Math.*, **13** (1949-50), p. 147.

classes of equivalence of infinitesimal generators. All this theory will certainly have interesting applications to the integration of nonstationary differential equations in Banach spaces. In Chapter XIV, to avoid the fact that the infinitesimal generator of the adjoint $T(\xi)^*$ of a semi-group $T(\xi)$ need not be the adjoint of the infinitesimal generator of $T(\xi)$, PHILLIPS relativizates the notion of adjoint space with regard to a closed operator with dense domain, and obtains in this way the possibility to develop a natural theory. As to the operational calculus (Ch. XV) the basic idea seems to be the same as in HILLE's first edition $\left[f(A)=\int_0^\infty T(\xi)\,da(\xi) \text{ for } f(\lambda)=\int_0^\infty \exp(\xi\lambda)\,da(\xi)\right]$, but is more deeply studied here. In Chapter XVI, on spectral theory, the spectral mapping theorems are studied, using GELFAND's representation theory. The behaviour of the point spectrum, continuous spectrum, etc., is studied by the old method of HILLE. The results given here concerning the spectral properties of general semi-groups, are fairly complete. The last two chapters, on holomorphic semi-groups, and applications on ergodic theory, deal with material which was essentially contained also in the first edition.

The fourth part of the book („Special Semi-Groups and Applications") covers the third part of the first edition, with the omission of the chapter on the applications to the theory of partial differential equations (whose literature had grown so tremendously that it could be treated adequately only in a separate book), but including a new chapter on the abstract Cauchy problem. This theory (especially) of HILLE aud PHILLIPS, seems to put an end to a long sequence of researches on the theoretical possibilities to apply the semi-group theory to the Cauchy problem for differential equations.

The last part („Extensions of the Theory") contains three chapters: Notes on Banach Algebras, Lie Semi-groups and Functions on Vectors to Vectors. The first and the last chapter follow in large lines Chapter XXII, and Chapter IV of the first edition, respectively. The chapter on Lie semi-groups is new and follows HILLE's papers (f. i.: Lie theory of semi-groups of linear transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 89—114).

From this, more than succint review, one can see that in fact each part of the book is a monography in itself, and that they are related to each other by the underlying idea of semi-group. It is a certitude, that by its ideas, its wideness and completeness, and by the applications treated, this book will be of basic importance for all mathematicians who work in functional analysis.

Ciprian Foiaş (Bucharest)

H. S. M. Coxeter—W. O. J. Moser, Generators and relations for discrete groups (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 14), VIII + 155 Seiten, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer Verlag, 1957.

Das Ziel des Buches ist von der Literatur der endlich generierten Gruppen einen Überblick zu bieten, die mit ihren Generatoren (und mit den nötigen Relationen zwischen ihnen) explizite darstellbar sind. Verff. hatten dazu die in Rede kommende Literatur fast restlos bis in die letzte Zeit (1956) durchforscht. Ein Teil dieser Gruppen hat eine starke geometrische Beziehung — der geometrische Grund ist ja in vielen Fällen sogar der ursprüngliche, — so hat auch das Buch einen geometrischen Charakter. Das Buch beschäftigt sich nicht ausführlich mit den Permutationsgruppen, weil dieses Gebiet das älteste und am besten ausgearbeitete Gebiet der Gruppentheorie ist (dazu s. z. B. die Arbeit von J. E. BURNS, Abstract definitions of groups of degree eight, *American Journal of Math.*, **37** (1915), 195—214, und neulichst das Buch von S. PICCARD, *Sur les bases des groupes d'ordre fini* (Neuchâtel, 1957). Das Material des Buches zerfällt in 9 Kapitel, von denen die teils oder im Ganzen auf Geometrie bezüglichen Kapitel die folgenden sind: Kapitel 3: Graphe, Netze, Cayley-diagramm; Kapitel 4: Abstrakte Kristallographie (dieses Kapitel beschäftigt sich im Wesentlichen mit den 17 zweidimensionalen Raumgruppen); Kapitel 6: Die symmetrischen, alternierenden und anderen speziellen Gruppen (hier werden — unter anderen — die Polyedergruppen und die Millersche Verallgemeinerung der Polyedergruppen behandelt); Kapitel 8: Reguläre Netze (hier werden gewisse Netze am Torus und an der zweiblättrigen Riemannschen Fläche, und Gruppen in Verbindung mit den symmetrischen Graphen behandelt); Kapitel 9: Die mit Involutionen generierten Gruppen (es handelt sich in diesem Kapitel um die unendlichen euklidischen und nicht-euklidischen Gruppen mit den Relationen $R_i^2=(R_iR_j)^{p_{ij}}=E$ $(1\leqq i<j\leqq n)$). Der Inhalt der übrigen Kapitel: Kapitel 1: Zyklische, dizyklische und metazyklische Gruppen; Kapitel 2: Systematische Enumeration der Nebengruppen; Kapitel 7: Modulare und lineare gebrochene Gruppen. Jedes Kapitel enthält ausführliche literarische Hinweise sowohl zu dem dargelegten Material, als auch zu den hingehörigen Problemen. Zahlreiche Ergebnisse waren bisher noch nicht in Buch bearbeitet worden, insbesondere muß man das Kapitel 2 hervorheben, wo über die Arbeit von J. A. Todd and H. S. M. Coxeter, A practical method for enumerating cosets of a finite abstract group, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (2) 5 (1936), 26—34, berichtet wird. Diese Arbeit entwickelt eine Methode von E. H. Moore so, daß das vorliegende Problem mit dieser Methode jetzt schon in konkreten Fällen mit gewissen dazu konstruierten Rechenmaschinen gelöst werden kann. Diese Methode hat in dieser Richtung eine grundlegende Bedeutung. Das Buch ist mit 12 Tafeln ergänzt, die die Benennungen, Erzeugungen mit Generatoren, die Ordnungen und andere charakteristische Angaben der zu verschiedenen Klassen gehörigen wichtigeren Gruppen enthalten. Diese Tafeln sind die folgenden: 1) Nicht-abelsche Gruppen mit kleinerer Ordnung als 32. 2) Die kristallographischen und nicht-kristallographischen Punktgruppen. 3) Die 17 zweidimensionalen Raumgruppen. 4) Untergruppenverknüpfungen unter den 17 zweidimensionalen Raumgruppen. 5) Alternierende und symmetrische Gruppen vom Grad kleiner als 7. 6) Die Gruppen $LF(2,p)$ für $p<30$. 7) Die einfachsten projizierbaren (reflexiblen) Netze. 8) Die bekannten endlichen Netze $\{p,q\}$. 9) Die regulären Netze von der Gattung 2. 10) Die irreduziblen endlichen Gruppen mit den Relationen $(R_iR_k)^{p_{ik}}=E$ $(p_{ii}=1)$. 11) Die irreduziblen euklidischen Gruppen mit den Relationen $(R_iR_k)^{p_{ik}}=E$ $(p_{ii}=1)$. 12) Die Erklärung der gebrauchten Symbole mit abstrakten Definitionen. — Das Material des Buches ist leicht übersichtlich, die Bearbeitung ist klar und elegant.

J. Szép (Szeged)

Erwin Kreyszig, Differentialgeometrie, XI + 421 Seiten, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1957.

Dieses Buch gibt eine ausgezeichnete Einführung in die Differentialgeometrie der Euklidischen Räume, aber auch diejenigen, die sich mit den Fundamentalbegriffen der Differentialgeometrie schon bekannt gemacht haben, können darin viele interessante Probleme und Beweisführungen finden. Diesbezüglich wollen wir in erster Reihe auf die in Kapitel 6 behandelte Theorie der Abbildungen, auf den Gauß—Bonnetschen Satz und auf die Untersuchungen der speziellen Flächen in Kapitel 8 verweisen.

In den ersten beiden Kapiteln behandelt der Verf. nach einigen Vorbemerkungen die Theorie der Raumkurven im dreidimensionalen Euklidischen Raum. Aus didaktischen Gründen wird hier der Tensorkalkül noch nicht benützt.

In den nachfolgenden Kapiteln 3—8 ist die Theorie der Flächen und die Vektor- und Tensorrechnung mit einigen Anwendungen entwickelt. Die Benützung der Tensorrechnung ermöglicht für die Flächentheorie die modernste Behandlung, die die weiteren Studien, in erster Reihe in der Richtung der Riemannschen Geometrie, sehr erleichtert. Die innere Geometrie der Flächen ist im wesentlichen die Theorie eines zweidimensionalen Riemannschen Raumes, dessen metrischer Grundtensor $g_{\alpha\beta}$ aber nicht a priori, sondern durch eine reelle und eindeutige Vektorfunktion $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ bestimmt ist. Nach unserer Meinung ist ein besonderer Vorteil des Buches, daß in ihm die Beziehungen der Differentialgeometrie zu verschiedenen Zweigen der Mathematik (wie z. B. zur Variationsrechnung, Topologie, Differentialgleichungen) deutlich hervortreten, und auch die Anwendbarkeit der Differentialgeometrie in der Geodäsie und Kartographie eingehend studiert wird.

Mannigfache interessante Übungsbeispiele und Aufgaben ergänzen die theoretischen Erörterungen. Die Schwierigkeiten der modernen Symbolik der Tensorrechnung sind in diesem Buche in eleganter Weise überwunden. Jedem der diesen Band gründlich studiert, wird es klar hervortreten, daß das Rechnen mit Tensoren in der modernen Differentialgeometrie nur ein wichtiges Hilfsmittel und kein Selbstzweck ist, da ja die Grundaufgabe der Differentialgeometrie darin besteht, die charakterisierenden differentialgeometrischen Invarianten der Gebilde zu bestimmen.

A. Moór (Szeged)

Wolfgang Haack, Darstellende Geometrie, Bd. III (Sammlung Göschen Bd. 144), 127 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1957.

Das erste Kapitel enthält die wichtigsten Konstruktionen der orthogonalen Axonometrie mit einigen Hinweisen auf die schiefe Axonometrie, ferner den Satz von Pohlke. In den übrigen vier Kapiteln handelt es sich um die Zentralprojektion. Nach der Erörterung der Grundkonstruktionen (Kap. II) und der Elemente der angewandten Perspektive (Kap. III) beschäftigt sich der Verf. eingehend mit der Perspektive der Kreise in verschiedenen Lagen und mit deren Anwendungen auf die Zentralprojektion von Zylindern, Kegeln und Kugeln (Kap. IV). Das letzte Kapitel behandelt die allgemeine Theorie der Schattenkonstruktion und gibt einige typische Beispiele. Wie in den ersten zwei Bänden, werden auch hier die praktischen Gesichtspunkte in den Vordergrund gestellt. Man findet, insbesondere in Kapiteln III und IV, zahlreiche Bemerkungen, die die praktische Ausführung der Darstellung gewisser Objekte vereinfachen. Schöne, übersichtliche Abbildungen erleichtern das Verstehen des Textes.

G. Szász (Szeged)

A. H. Wilson, Thermodynamics and Statistical Mechanics, XV+495 pages, Cambridge, University Press, 1957.

„The subject of thermodynamics seems to present peculiar difficulties to both physicists and chemists, and, while there are many excellent books which help to smooth the path of chemists, there are relatively few which have been written with the physicists, and particularly the theoretical physicists, in mind". This opinion of the author characterizes the programme of his excellent text book. It emphasizes in a very marked way the physical contents of thermodynamics and of statistical mechanics, on the basis of an elegant and precise mathematical analysis. It covers a considerable range of elementary and advanced topics, and also deals with the difficult points which mostly occupy the minds of critical readers.

The first three chapters handle the classical development of thermodynamics on traditional lines suggested by CLAUSIUS, KELVIN, MAXWELL, GIBBS, and the fourth chapter deals with CHARATHÉODORY'S axiomatic approach. The author's review of the traditional treatment, however, prepares the reader for the modern axiomatic set-up. Especially, the second chapter dealing with the second law of thermodynamics is very stimulating and it contains a deep analysis of the formulation of the second law on the basis of the principles of CLAUSIUS and KELVIN. It should be objected, however, that there is no distinction made between quasi-static and reversible, and non-static and irreversible, processes, respectively, as it is usual and more convenient from axiomatic point of view. In chapter 5 the fundamental ideas and formulae of statistical mechanics are developed, where it is assumed that the reader is familiar with quantum mechanics. Unlike most current text books of statistical mechanics, this chapter bases its treatment on the effect of the symmetry properties of the wave functions rather than on MAXWELL—BOLTZMANN'S 'most probable distributions' or on GIBBS' approach. The elements of the theory of fluctuations are inclued in this chapter too. Different applications of thermodynamics and statistical mechanics are given in chapters 6–14, where the selection of the topics is motivated by previous individual interest of the author: applications of statistical mechanics to determine the specific heat of gases and solids, systems obeying Fermi-Dirac as well as Bose-Einstein statistics and theory of radiation (Ch. 6.); the third law of thermodynamics, the spectroscopic and calorimetric entropy, the entropy of solids which can exist in allotropic form as well as in supercooled liquids and glasses (Ch. 7); the theory of imperfect gases and that of general equations of state (Ch. 8); the heterogeneous equilibrium of a single substance including the properties of helium (Ch. 9); electric and magnetic phenomena, statistical mechanics of polar substance, ferroelectricity, the statistical mechanics of paramagnetic, ferromagnetic, and antiferromagnetic substances, respectively, and the theory of superconductivity (Ch. 10); gas mixtures and chemical reaction (Ch. 11); the thermodynamics of dilute and ideal solutions, heterogeneous equilibrium when one phase consists of a single component and when both phases are mixtures, and the theory of non-ideal solutions (Ch. 12); the theory of solutions of electrolytes and electrochemical systems (Ch. 13); finally, the theory of rubbers, that of superlattices in alloys and some exact solutions of the one-dimensional order-disorder problems.

Some traditional topics of current text books and monographs such as the general theory of liquids, surface phenomena, and the thermodynamics of irreversible processes are omitted. However, owing to the elegant treatment of various important problems, the present book is a very useful help for all physicists and physical chemists who wish to enter, more deeply than customary, into the fundamental principles of the subject.

J. I. Horváth (Szeged)

H. Weyl, Symmetrie (Wissenschaft und Kultur, Bd. 11), 157 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1955.

Übersetzung der 1952 erschienenen englischen Originalausgabe [1]). Das schöne Werk, das sich zu einem breiteren Leserkreis wendet, wird besimmt auch in seiner deutschen Ausgabe den wohl verdienten Erfolg erreichen.

B. Sz.-Nagy (Szeged)

---

[1]) Besprochen in *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 267.

Marc Zamansky, Introduction à l'algèbre et l'analyse modernes, XIV + 333 pages, Paris, Dunod, 1958.

C'est le premier volume d'une nouvelle „Collection universitaire de mathématiques", aux éditions Dunod.

L'ambition de l'auteur est de montrer, sur un nombre restreint de chapitres choisis de l'algèbre et de l'analyse, „combien la voie qui mène aux mathématiques modernes est facile" et que „la science mathématique est celle qui contient le moins d'idées mais la richesse d'un concept dépend de sa formulation et de son usage". Afin de fonder cette thèse (qui paraît toutefois assez hardie et catégorique) l'auteur passe en revue quleques notions fondamentales de l'algèbre (lois de composition internes et externes, espaces vectoriels, applications linéaires, bilinéaires ou multilinéaires, polynomes et fractions rationnelles), puis il traite des propriétés de la droite numérique et de l'espace euclidien R^n, des espaces métriques de type général, de leurs applications continues ou différentiables, de l'intégrale, et finalement de la convergence et de la sommation des séries. Un chapitre, d'ailleurs assez isolé, traite de la fonction exponentielle.

Le domaine des nombres réels est introduit, à partir du domaine des nombres rationnels, par les suites de Cauchy. Ce même procédé est appliqué à la „complétion" d'un espace métrique quelconque. Comme application d'importance particulière, l'intégrale de Lebesgue est introduite, à partir de l'intégrale des fonctions en escalier, par les suites de Cauchy dans la métrique L^1. Cette construction de l'intégrale de Lebesgue par complétion métrique, due à l'auteur, est sans doute la partie la plus originiale et la plus intéressante du livre.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

Ludwig Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung (Sammlung Göschen, Bd. 768/768a), fünfte, erweiterte Auflage, 180 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1956.

Es mag wohl überflüssig sein, diese treffliche, wohlbewährte Einführung, die jetzt schon in ihrer fünften Auflage vorliegt, den Lesern zu empfehlen. Das Büchlein ist knapp aber klar gefaßt und enthält erstaunlich viel. Die alte Einteilung in Abschnitte ist beibehalten (Grundleguug. Lineare Funktionen. — Rationale Funktionen. — Prinzip des Randes und Spiegelungsprinzip. — Weitere Abbildungen durch gegebene Funktionen. — Abbildung gegebener Gebiete). Neben kleineren Ergänzungen im Text gegenüber älteren Auflagen, findet man zwei neue Paragraphen über Verzerrungssätze für schlichte Abbildungen des Gebietes $|z|>1$ und über die Löwnersche Differentialgleichung.

B. Sz.-Nagy—T. Szerényi (Szeged)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

A. D. Alexandrow, Konvexe Polyeder (Mathematische Lehrbücher und Monographien, Bd. 8), X + 419 Seiten, Berlin, Akademie-Verlag, 1958. — DM 37,—

L. Baumgartner, Gruppentheorie (Sammlung Göschen, Bd. 837), 110 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1958. — DM 2,40

O. C. de Beauregard, Théorie synthétique de la relativité restreinte et des quanta (Les grands problèmes des sciences, VIII), XII + 200 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957. — 3800 fr.

R. P. Boas—C. Buck, Polynomial expansions of analytic functions (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 19), VIII + 77 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1958. — DM 19,80

Colloque d'algèbre supérieure (tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre, 1956), 293 pages, Louvain, Ceuterick, 1957. — 250 fr. belg.

M. M. Day, Normed linear spaces (Ergebnisse der Matematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, Heft 21), VIII + 139 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1958. — DM 28,—

H. G. Eggleston, Problems in euclidean space, Application of convexity (International series of monographs on pure and applied mathematics, Vol. 5), VIII + 165 pages, London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1957. — 40 sh.

P. B. Fischer, Arithmetik (Sammlung Göschen, Bd. 47), 3. Auflage, 152 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1958. — DM 2,40

U. Grenander—G. Szegő, Toeplitz forms and their applications, X + 245 pages, Berkeley—Los Angeles, University of California Press, 1958. — $ 6,—

K. P. Grotemeyer, Analytische Geometrie (Sammlung Göschen, Bd. 65/65a), 202 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1958. — DM 4,80

W. Haack, Darstellende Geometrie I. (Sammlung Göschen, Bd. 142), 2. durchgesehene und ergänzte Auflage, 113 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1958. — DM 2,40

H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 93), XIII + 312 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957. — DM 49,80

G. Hoheisel, Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen (Sammlung Göschen, Bd. 1179/1179a), 187 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1958. — DM 4,80

L. Holzer, Zahlentheorie, Teil I (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek, Bd. 13), VI + 202 Seiten, Leipzig, Teubner, 1958. — DM 9,75

É. Lefebvre, Structure et objet de l'analyse mathématique, X + 284 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1958. — 3500 fr.

P. Lorenzen, Formale Logik (Sammlung Göschen, Bd. 1176/1176a), 164 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1958. — DM 4,80

F. Maeda, Kontinuierliche Geometrien (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 95), X + 244 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1958. — DM 39,—

Z. P. Mamuzić, Kombinatorika (Matematička Biblioteka, No. 6), 122 pages, Beograd, Nolit, 1957.

S. Piccard, Sur les bases des groupes d'ordre fini (Mémoires de l'Université de Neuchâtel, Tome 25), XXIV + 242 pages, Neuchâtel, Secrétariat de l'Université, 1957. —

G. Pickert, Analytische Geometrie (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Bd. 24), 3. bearbeitete Auflage, XII + 410 Seiten, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1958. — DM 26,—

G. Pólya, Les mathématiques et le raisonnement „plausible", XVI + 299 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1958. — 3200 fr.

L. S. Pontrjagin, Topologische Gruppen, Teil 2, 308 Seiten, Leipzig, Teubner, 1958. — DM 16,—

K. Prachar, Primzahlverteilung (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 91), X + 415 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957. — DM 58,—

F. Rehbock, Darstellende Geometrie (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 92), XV + 232 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957. — DM 26,80

H. Richter, Wahrscheinlichkeitstheorie (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 86), XII + 435 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1956. — DM 69,60

R. Risser—C. E. Traynard, Les principes de la statistique mathématique, Livre II (Traité du calcul des probabilités et de ses applications, Tome I, Fasc. 4), XI + 418 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1958. — 7000 fr.

G. Springer, Introduction to Riemann surfaces, VIII + 307 pages, Reading, Massachusetts, Addison—Wesley, 1957. — $ 9,50

K. Strubecker, Differentialgeometrie II (Sammlung Göschen, Bd. 1179/1179a), 187 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1958. — DM 4,80

The teaching of algebra in sixth forms (A report prepared for the Mathematical Association), IX + 104 pages, London, Bell, 1957.

A. Tresse, Théorie élémentaire des géométries non euclidiennes, Tome I, 150 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1957. — 2500 Fr.

Treizième Congrès des Mathématiciens Scandinaves (tenu à Helsinki 18—23 Août, 1957), 209 pages, Helsingfors, Mercators Tryckeri, 1958.

S. Valentiner, Vektoren und Matrizen (Sammlung Göschen, Bd. 354/354a), 8. erweiterte Auflage, 202 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1958. — DM 4,80

B. L. van der Waerden, Mathematische Statistik (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 87), IX + 360 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1957. — DM 49,60

M. V. Wilkes—D. J. Wheeler—S. Gill, Programs for an electronic digital computer, XIV + 238 pages, Reading, Massachusetts, Addison—Wesley, 1957. — $ 7,50

A. C. Zaanen, An introduction to the theory of integration, X + 254 pages, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1958. — guilders 25,—

K. Zeller, Theorie der Limitierungsverfahren (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 15), VIII + 242 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1958. — DM 36,80

Mémorial des sciences mathématiques, fascicules 138—139, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

138. G. Berge, Théorie générale des jeux à *n* personnes, IV + 114 pages.
139. K. L. Hiong, Sur les fonctions méromorphes et les fonctions algébroïdes, IV + 104 pages.

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

Prix d'abonnement pour l'étranger $ 6.—. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21).

Formátum B/5.	Felelős szerk.: Szőkefalvi-Nagy Béla.
Terjedelem 7¼ B/5 ív.	Nyomdábaadás ideje: 1958. VII. 10.
Példányszám 620.	Megjelenés: 1958. XII. 15.

Kiadja a Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, V., Szalay-u. 10—14.
Kiadásért felel a Tankönyvkiadó Vállalat igazgatója.

Szegedi Nyomda Vállalat 58-2619 Felelős vezető: Vincze György